С. Г. МИХЛИН

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С. Г. МИХЛИН

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

ОГЛАВЛЕНИЕ

Светлой памяти
Викторины Исаевны ЛИБИНОЙ,
жены и самого близкого друга,
посвящает эту книгу
Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге в основном изложены результаты работ автора, относящихся к теории многомерных сингулярных интегралов и уравнений, содержащих такие интегралы; в той мере, в какой это необходимо для построения указанной теории, приведены результаты других авторов. Автор имел, однако, в виду, что существует ряд важных и интересных работ по сингулярным интегралам, основанных на других идеях и не связанных прямо с проблематикой настоящей книги. Чтобы как-то осведомить читателя об этих работах, их содержание коротко изложено в § 1 Введения; автор старался при этом не упустить ни одной сколько-нибудь значительной работы. Другие параграфы Введения содержат сведения, необходимые для последующего; в частности, § 2 посвящен некоторым, имеющим и самостоятельный интерес, вопросам общей теории уравнений в банаховых пространствах.

Главным предметом исследования являются сингулярные интегралы, распространенные по евклидову пространству или по ляпуновскому многообразию без края, а также уравнения, содержащие такие интегралы; исследование проводится в функциональных пространствах L_p. Основной результат для уравнений совсем просто формулируется в терминах введенного автором понятия символа: если символ сингулярного уравнения удовлетворяет некоторым условиям гладкости и нижняя грань его модуля положительна, то для данного уравнения верны основные теоремы Фредгольма. Как известно, для одномерного сингулярного уравнения в общем случае такой результат не имеет места: не имеет он места в общем случае и для систем многомерных сингулярных уравнений.

В гл. VIII даны некоторые приложения многомерных сингулярных интегральных уравнений к краевым задачам математической физики. Содержание гл. VIII, разумеется, далеко не исчерпывает всех возможных приложений такого рода; это видно хотя бы из работ А. Кальдерона [2] и М. Ямагути [1], в которых сингулярные интегралы весьма удачно применены к уравнениям в частных производных гиперболического типа.

С теорией сингулярных интегральных операторов связана задача о мультипликаторах интегралов Фурье; насколько автору известно, этот вопрос до последнего времени не был затронут в литературе, хотя аналогичному вопросу для рядов Фурье посвящено много работ. В Добавлении приведена полученная автором теорема о мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах L_p.

Автор рад выразить свою искреннюю признательность О. А. Олейник, Г. П. Акилову и Х. Л. Смолицкому, которые прочитали книгу в рукописи и сделали ряд ценных замечаний. Все эти замечания использованы автором и во многом содействовали улучшению книги.

Ленинград, апрель 1961 г. *С. Михлин*

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Обзор результатов

1°. Почти одновременно с фредгольмовской теорией интегральных уравнений с непрерывным (или, по крайней мере, с ограниченным) ядром появились известные работы Гильберта и Пуанкаре, в которых изучались сингулярные интегральные уравнения, т. е. такие уравнения, в которых интеграл расходится в обычном смысле и должен быть понимаем в смысле его главного значения по Коши, или, как теперь принято говорить, интеграл считается *сингулярным*. По сравнению с уравнениями Фредгольма сингулярные интегральные уравнения отличаются той важной особенностью, что входящие в них сингулярные интегралы оказываются операторами ограниченными, но не вполне непрерывными в соответствующих функциональных пространствах; это не позволяет применить к сингулярным интегральным уравнениям теорию Фредгольма — Риса — Шаудера. Другая особенность этих уравнений состоит в том, что для них не безразлично число независимых переменных; приходится различать случаи одной и нескольких независимых переменных.

Упомянутые выше работы Гильберта и Пуанкаре относятся к одномерным сингулярным уравнениям. Теория и приложения этих уравнений были широко развиты в длинном ряде последующих работ; относящиеся сюда результаты изложены, с различных точек зрения и с различной степенью подробности, в монографиях Н. И. Мусхелишвили [1], Н. П. Векуа [1], Б. В. Хведелидзе [1] и Ф. Д. Гахова [1], а также в обзорной статье автора [11]. Некоторые вопросы теории одномерных сингулярных уравнений изложены также в обзорной статье Г. Фикера [1].

2°. Первые значительные работы по многомерным сингулярным уравнениям принадлежат Ф. Трикоми [1, 2]. Этот автор исследовал двойные сингулярные интегралы вида

$$Au = v(x) = \int\limits_{E_2}\int \frac{f(\theta)}{r^2} u(y)\,dy, \tag{1}$$

где x и y — точки евклидовой плоскости E_2, r и θ — полярные координаты точки y относительно полюса x; функцию $f(\theta)$ Трикоми назвал *характеристикой* интеграла (1), который понимается как

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{r>\varepsilon}\int \frac{f(\theta)}{r^2} u(y)\,dy.$$

Ф. Трикоми установил условие, необходимое и достаточное для существования интеграла (1) по крайней мере в том случае, когда $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем; упомянутое условие состоит в том, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = 0; \tag{2}$$

это условие, должным образом обобщенное на случай многих измерений, всюду ниже предполагается выполненным.

Уже было указано, что интеграл (1) есть предел интеграла от той же подынтегральной функции, но распространенный по плоскости с вырезанным кругом $r<\varepsilon$. Ф. Трикоми исследовал вопрос о пределе интеграла, распространенного по плоскости, из которой точка x вырезана некруговой окрестностью, и пришел к следующему результату. Пусть точка x вырезана окрестностью σ_ε, уравнение границы которой имеет вид $r=\alpha(\varepsilon, \theta)$, и пусть равномерно по θ

$$\frac{\alpha(\varepsilon, \theta)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \beta(\theta), \quad \beta(\theta) > 0.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{E_2-\sigma_\varepsilon}\int \frac{f(\theta)}{r^2} u(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{E_2}\int \frac{f(\theta)}{r^2} u(y)\,dy - u(x)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\ln\beta(\theta)\,d\theta.$$

Ф. Трикоми установил также формулу дифференцирования двойных интегралов со слабой особенностью

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{E_2}\int \frac{\varphi(\theta)}{r}u(y)\,dy =$$

$$=\int\limits_{E_2}\int \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(\theta)}{r}\right]u(y)\,dy + u(x)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\frac{\partial r}{\partial x_k}\,d\theta.$$

Один из важнейших результатов Ф. Трикоми заключается в установлении правила композиции двойных сингулярных интегралов, иначе говоря, правила умножения операторов вида (1). Пусть

$$A_j u = \int\limits_{E_2}\int \frac{f_j(\theta)}{r^2}u(y)\,dy; \qquad j = 1,\ 2.$$

Тогда

$$A_1A_2u = \alpha u(x) + \int\limits_{E_2}\int \frac{f(\theta)}{r^2}u(y)\,dy, \tag{3}$$

где

$$\alpha = 2\pi\int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}_1(\theta)\tilde{f}_2(\theta+\pi)\,d\theta, \tag{4}$$

$$f(\theta) = \frac{d}{d\theta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\{\tilde{f}_1(\psi)\tilde{f}_2(\theta) + \tilde{f}_1(\theta)\tilde{f}_2(\psi) - \tilde{f}_1(\psi)\tilde{f}_2(\psi+\pi)\}\times$$
$$\times \operatorname{ctg}(\psi-\theta)\,d\psi; \tag{5}$$

в этих формулах $\tilde{f}_j(\theta)$ означает неопределенный интеграл от $f_j(\theta)$, ряд Фурье которого не содержит свободного члена.

При выводе формулы (4) Ф. Трикоми в статье [2] допустил ошибку, которая привела к неверному результату. Эта ошибка исправлена автором в [2]; следует, впрочем, указать, что в статье [1] Трикоми приводит без вывода верную формулу (4).

Формула (3) позволила Ф. Трикоми указать некоторый прием для решения сингулярных уравнений вида

$$au(x) + \int\limits_{E_2}\int \frac{f_1(\theta)}{r^2} u(y)\,dy = g(x); \qquad a = \text{const}. \tag{6}$$

Воздействуем на обе части уравнения (6) оператором

$$Bv = bv(x) + \int\limits_{E_2}\int \frac{f_2(\theta)}{r^2} v(y)\,dy; \qquad b = \text{const}.$$

Это приведет нас к уравнению

$$(ab + \alpha)\, u(x) + \int\limits_{E_2}\int \frac{u(y)}{r^2} [bf_1(\theta) + af_2(\theta) + f(\theta)]\, dy = Bg, \tag{7}$$

где α и $f(\theta)$ определяются по формулам (4) и (5). Подберем, если это окажется возможным, постоянную b и характеристику $f_2(\theta)$ так, чтобы $ab + \alpha = 1$ и

$$bf_1(\theta) + af_2(\theta) + f(\theta) = 0, \tag{8}$$

тогда формула (7) непосредственно дает решение уравнения (6). Равенство (8) представляет собой одномерное сингулярное уравнение с неизвестной $\tilde{f}_2(\theta)$; его анализом Ф. Трикоми не занимался.

3°. Следующей значительной работой по многомерным сингулярным интегралам была работа Ж. Жиро (1). Этот автор исследовал интегралы, распространенные по замкнутому ляпуновскому многообразию любой размерности m; многообразия эти не обязательно связные, но не имеют односторонних частей. На рассматриваемом многообразии Γ обычным образом вводится параметризация: многообразие разбивается на конечное число взаимно налегающих частей, каждая из которых взаимно однозначно отображается на некоторую область m-мерного евклидова пространства; так как многообразие — ляпуновское, то можно добиться того, чтобы функции, реализующие упомянутое преобразование, имели первые производные, удовлетворяющие условию Липшица с положительным показателем.

Ж. Жиро рассматривал сингулярные интегралы вида

$$\int\limits_{\Gamma} K(x, y)\, u(y)\, d\Gamma_y, \tag{9}$$

где функция $u(y)$ удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем, а ядро $K(x, y)$ подчинено следующим требованиям.

1. Разобьем многообразие Γ на части, как указано выше, и пусть точки x и y принадлежат одной и той же части нашего многообразия. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ декартовы координаты образов точек x и y в m-мерном евклидовом пространстве и положим

$$r^2 = \sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)^2.$$

Тогда $K(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y)$, где $K_2(x, y) = O(r^{\lambda - m})$, $\lambda > 0$, а $K_1(x, y) = K_1^*(x_1 - y_1, \ldots, x_m - y_m; v_1(x), v_2(x), \ldots, v_p(x))$, причем $K_1^*(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m; v_1, v_2, \ldots, v_p)$ и ее первые производные по аргументам $v_1, v_2, \ldots, v_p$ суть однородные функции порядка $-m$ относительно $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, непрерывные, если не все ω_j равны нулю. Предполагается еще, что при том же условии производные $\frac{\partial K_1^*}{\partial \omega_j}$ также непрерывны и что функции v_l непрерывно дифференцируемы.

2. С каждой точкой $x \in \Gamma$ можно связать положительно определенную форму

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{m} A_{\alpha\beta}(x)\, t_\alpha t_\beta$$

так, чтобы интеграл

$$\int K_1(x, y)\, d\Gamma_y,$$

распространенный по части многообразия Γ, определяемой неравенствами

$$0 < \eta^2 < \sum_{\alpha, \beta = 1}^{m} A_{\alpha\beta}(x)(x_\alpha - y_\alpha)(x_\beta - y_\beta) < \zeta^2,$$

равнялся нулю, каковы бы ни были достаточно малые числа η и ζ.

Жиро определяет интеграл (9) как предел при $\eta \to 0$ интеграла

$$\int K(x, y) u(y) d\Gamma_y,$$

распространенного по многообразию Γ, из которого вырезана его часть, определяемая неравенством

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}(x)(x_\alpha - y_\alpha)(x_\beta - y_\beta) < \eta^2. \qquad (10)$$

Доказывается, что при перечисленных условиях интеграл (9) определяет функцию, удовлетворяющую условию Липшица с тем же показателем, что и функция $u(y)$, если только этот показатель меньше единицы. Подробно исследуется композиция интегралов, один из которых сингулярный, а другой имеет слабую особенность; исследованы также некоторые случаи композиции сингулярных интегралов. [1])

Жиро изучал сингулярное интегральное уравнение

$$u(x) - \lambda \int_{\Gamma} K(x, y) u(y) d\Gamma_y = f(x) \qquad (11)$$

с ядром, сингулярная часть $K_1(x, y)$ которого имеет весьма специальный вид:

$$K_1(x, y) = \\ = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha(x)(x_\alpha - y_\alpha) \left[\sum_{\beta, \gamma=1}^{m} A_{\beta\gamma}(x_\beta - y_\beta)(x_\gamma - y_\gamma) \right]^{-\frac{m+1}{2}}, \qquad (12)$$

где $c_\alpha(x)$ — некоторые заданные функции.

Воздействуя на обе части уравнения (11) оператором

$$v(x) + \lambda \int_{\Gamma} H(x, y; \lambda) v(y) d\Gamma_y,$$

[1]) В недавно появившейся статье [8] Т. Г. Гегелиа получил некоторые новые результаты о композиции сингулярных интегралов, распространенных по ляпуновскому многообразию, а также о композиции интегралов, из которых один — сингулярный, а другой имеет слабую особенность.

где $H(x, y; \lambda)$ — произвольное сингулярное ядро, приходим к уравнению

$$[1+\lambda^2\Phi(x, \lambda)]\,u(x)+\lambda\int\limits_{\Gamma}\Big[H(x, y; \lambda)-K(x, y)-$$
$$-\lambda\int\limits_{\Gamma}H(x, z; \lambda)\,K(z, y)\,d\Gamma_z\Big]\,u(y)\,d\Gamma_y=$$
$$=f(x)+\lambda\int\limits_{\Gamma}H(x, y; \lambda)\,f(y)\,d\Gamma_y; \qquad (13)$$

здесь $\Phi(x, \lambda)$ — функция, полностью определяемая ядрами K и H и многообразием Γ. Уравнение (13) будет уравнением Фредгольма, если ядро $H(x, y; \lambda)$ удастся подобрать так, чтобы $1+\lambda^2\Phi(x, \lambda)\neq 0$ и чтобы

$$H(x, y; \lambda)-K(x, y)-$$
$$-\lambda\int\limits_{\Gamma}H(x, z; \lambda)\,K(z, y)\,d\Gamma_z=O(r^{k-m}), \qquad k>0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) Ж. Жиро решает для многообразий размерностей $m=1$ и $m=2$. Первый случай для нас не представляет интереса. Случай $m=2$ Жиро сводит к решению одномерного сингулярного уравнения для некоторой вспомогательной неизвестной $\omega(t)$:

$$\omega(t)-\mu\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos t\ln\sin^2\frac{\theta-t}{2}-\sin t\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\right)\omega(\theta)\,d\theta=$$
$$=-\Psi(t)\cos t, \qquad (15)$$

где $\Psi(t)$ — некоторая известная функция. Уравнение (15) решается сведением к некоторой краевой задаче теории гармонических функций. Тем самым для уравнения (11) с ядром (12) решена задача о сведении его описанным выше способом к уравнению Фредгольма, которому удовлетворяют все решения уравнения (11):[1] такое сведение возможно, если при данном λ функция $1+\lambda^2\Phi(x, \lambda)$ не обращается в нуль ни при каком x, и невозможно в противном случае.

В конце статьи [1] Ж. Жиро дает некоторые приложения ранее полученных им результатов. Для общего уравнения

[1]) Эту задачу обычно называют *задачей о регуляризации* (см. § 2).

эллиптического типа второго порядка строится аналог потенциала простого слоя. Если плотность этого потенциала удовлетворяет условию Липшица с показателем, меньшим единицы, то на самой поверхности существуют первые производные этого потенциала, удовлетворяющие условию Липшица с тем же показателем; они выражаются через некоторые сингулярные интегралы. Этот результат Жиро использует далее в задаче о косой производной для эллиптического уравнения второго порядка (см. ниже, § 46); Ж. Жиро сводит эту задачу к сингулярному уравнению с ядром вида (12). В случае двух или трех пространственных координат и в предположении, что направление дифференцирования нигде не является касательным к границе рассматриваемой области, Жиро доказывает, что для упомянутого уравнения верны теоремы Фредгольма. В статье [2] Ж. Жиро распространил это утверждение на случай любого числа координат.

4°. В работах автора [1, 2] были рассмотрены двойные интегралы, распространенные по двумерной плоскости. Было выяснено, что сингулярный оператор вида

$$au(x)+\int\limits_{E_2}\int\frac{f(\theta)}{r^2}u(y)\,dy \tag{16}$$

можно представить в виде ряда по положительным и отрицательным степеням сингулярного оператора с характеристикой $e^{i\theta}$; это обстоятельство позволило автору связать с оператором (16) некоторую функцию, названную *символом* этого оператора, так что сумме и произведению операторов соответствует сумма и произведение их символов. Понятие символа сразу же распространяется на более общие операторы вида

$$a(x)u(x)+\int\limits_{E_2}\int\frac{f(x,\theta)}{r^2}u(y)\,dy \tag{17}$$

при некоторых ограничениях на характер зависимости функций $a(x)$ и $f(x,\theta)$ от x. В терминах символа очень просто решается задача о регуляризации сингулярного интегрального уравнения: *регуляризация возможна тогда и только тогда, когда нижняя грань модуля символа положительна.* В заметке [3] автор определил символ для сингулярного интеграла, распространенного по двумерному многообразию.

Ж. Жиро [3] опубликовал без вывода формулы, определяющие символ сингулярного интеграла, распространенного по евклидову пространству произвольного числа измерений. Вывод этих формул был дан впоследствии в статье автора [18].

В работах [4, 5] автор рассматривал операторы вида (17) в пространстве $L_2(E_2)$ и дал простые достаточные условия их ограниченности. Это позволило автору решить вопрос об эквивалентной регуляризации сингулярного уравнения, т. е. о его сведении к эквивалентному уравнению типа Фредгольма (точнее, типа Риса — Шаудера). Как оказалось, для этого по-прежнему достаточно, чтобы нижняя грань модуля символа была положительной. Таким образом, если сингулярное интегральное уравнение, содержащее двойной интеграл, допускает регуляризацию, то оно допускает и эквивалентную регуляризацию. Любопытно отметить, что для одномерных сингулярных уравнений аналогичное утверждение не имеет места.

В заметках [6, 7] автора доказано, что сингулярный оператор вида (E_m — евклидово пространство m измерений)

$$au(x) + \int\limits_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)\,dy, \quad r = |y - x|, \quad \theta = \frac{y - x}{r} \qquad (18)$$

ограничен в $L_2(E_m)$, если символ этого оператора ограничен, и его норма не превосходит максимума модуля символа. Установлено также, что оператор (18) можно представить в виде ряда по степеням перестановочных между собой сингулярных операторов с символами $e^{2i\vartheta_1}$, $e^{2i\vartheta_2}$, ..., $e^{2i\vartheta_{m-2}}$, $e^{i\varphi}$, где ϑ_1, ϑ_2, ..., ϑ_{m-2}, φ — угловые координаты точки θ; эти последние операторы унитарны. В заметке [7] содержится более сильное утверждение, согласно которому норма сингулярного оператора не превосходит максимума модуля символа и в том случае, когда коэффициент a и характеристика f зависят еще и от x. Впоследствии М. Г. Крейн любезно обратил внимание автора на то, что это утверждение на самом деле не доказано; по всей видимости, оно и неверно. [1])

[1]) Подробнее об этом см. заметку автора [17], а также замечание в конце § 25.

В упомянутых заметках, а также в статье [11] автора, доказывается ряд теорем о многомерных сингулярных уравнениях; доказательства этих теорем ненадежны, так как они опираются на недоказанное утверждение, упомянутое выше. В последующих работах (см. ниже) автору удалось выяснить, что самые теоремы верны, но при более жестких ограничениях, наложенных на символ. Автор считает необходимым отметить здесь еще одну погрешность, допущенную им в статьях [11, 19]: в общем случае индекс системы многомерных сингулярных уравнений с необращающимся в нуль символическим определителем может быть отличен от нуля.

Некоторые новые результаты по двумерным сингулярным уравнениям содержатся в работе И. А. Ицковича [1]. Отметим здесь его теорему об инвариантности множества значений символа при замене переменных. В статье [2] того же автора дано выражение характеристики двойного сингулярного интеграла через его символ.

5°. Заслуживает быть отмеченной работа В. Тржицинского [1], изучавшего сингулярные интегралы, распространенные по двумерной поверхности с краем. В этой работе сделана интересная, но, на наш взгляд, далеко не завершенная попытка построить для трехмерного пространства теорию краевых задач типа задачи Римана на плоскости.

6°. Ж. Хорват [2—4] распространил формулы композиции сингулярных интегралов, полученные автором и Ж. Жиро, на сингулярные интегралы, плотности [1]) которых суть обобщенные функции в смысле Л. Шварца. [2])

7°. С 1952 г. стали появляться работы А. Кальдерона и А. Зигмунда [1—7]; результаты этих работ частично изложены в обзорных статьях А. Кальдерона [1] и А. Зигмунда [3, 4].

Основная проблема, которой посвящены работы А. Кальдерона и А. Зигмунда — это проблема об ограниченности многомерного сингулярного интегрального оператора в пространствах $L_p(E_m)$, $p > 1$. В статье [1] рассмотрены интегралы вида

$$\int\limits_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)\, dy; \tag{19}$$

---

[1]) См. ниже, § 5.

[2]) Как операторы в пространствах обобщенных функций сингулярные интегралы исследуются также в работах Б. Мальгранжа [1 — 7], которые недавно стали известны автору.

для их исследования применяется преобразование Фурье. Это приводит авторов к такой теореме: сингулярный оператор ограничен в $L_2(E_m)$, если преобразование Фурье его ядра ограничено. Впоследствии автор [19] показал, что преобразование Фурье ядра интеграла (19) совпадает с его символом; тем самым выяснено, что упомянутая теорема А. Кальдерона и А. Зигмунда тождественна с теоремой автора [7], доказанной им в 1938 г. Тем не менее интересен установленный А. Кальдероном и А. Зигмундом признак ограниченности символа: для этого достаточно, чтобы был ограничен интеграл

$$\int\limits_S |f(\theta')| \ln \frac{1}{|\cos\gamma|}\, dS',$$

где S — единичная сфера, dS' — элемент ее поверхности и γ — угол между векторами $O\theta$ и $O\theta'$.

В той же статье [1] А. Кальдерона и А. Зигмунда интеграл (19) исследуется в пространствах $L_p(E_m)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$; доказывается, что оператор (19) ограничен в $L_p(E_m)$, если $f(\theta)$ удовлетворяет условию Дини

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty, \tag{20}$$

где $\omega(t)$ — модуль непрерывности характеристики $f(\theta)$.

Статья [1] содержит ряд других результатов, на которых мы здесь не останавливаемся.

В статье [2] рассматриваются сингулярные интегралы, распространенные по кубу R с ребром длины единица и с центром в начале координат; предполагается, что ядро $K(x-y)$ и плотность $u(y)$ интеграла периодичны, с периодом единица, по каждой из координат. В предположении, что характеристика удовлетворяет условию Дини, доказывается ряд теорем, аналогичных теоремам статьи [1], но применительно к пространствам $L_p(R)$.

В заметке автора [17] было установлено, что двойной сингулярный интеграл

$$\iint\limits_{E_2} \frac{f(x,\theta)}{r^2}\, u(y)\, dy, \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x,\theta)\, d\theta = 0,$$

ограничен в $L_2(E_2)$, если

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,\ \theta)|^2 d\theta \leqslant C = \text{const}.$$

А. Кальдерон и А. Зигмунд [3] распространили эту теорему на случай любого числа измерений; при этом они отмечают, что показатель 2 в последнем интеграле можно заменить любым $p > \frac{2(m-1)}{m}$; на примере показано, что дальнейшее уменьшение p невозможно. В работе [3] содержится ошибка, указанная автором в [19]; эта ошибка исправлена А. Кальдероном и А. Зигмундом в заметке [6].

Наиболее важные, по нашему мнению, результаты А. Кальдерона и А. Зигмунда по теории сингулярных интегралов даны ими в статье [4]. Приведем основные теоремы этой статьи.

Теорема 1.1. *Сингулярный интегральный оператор*

$$\int_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)\, dy$$

ограничен в $L_p(E_m)$ при любом p, $1 < p < \infty$, если существуют интегралы

$$\int_S |f(\theta)|\, dS, \qquad \int_S |f(\theta) + f(-\theta)| \cdot \ln^+ |f(\theta) + f(-\theta)|\, dS.$$

Теорема 2.1. *Сингулярный интегральный оператор*

$$\int_{E_m} \frac{f(x,\ \theta)}{r^m} u(y)\, dy$$

ограничен в $L_p(E_m)$, $1 < p < \infty$, если

$$\int_S |f(x,\ \theta|^{p'}\, dS \leqslant C = \text{const}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Для случая, когда $f(x,\ \theta) = -f(x,\ -\theta)$, простое и изящное доказательство теоремы 2.1 дал И. А. Ицкович [3], который использовал обобщенные функции и теорему М. Риса об ограниченности в L_p одномерного сингулярного оператора с ядром Коши.

В статье [5] А. Кальдерон и А. Зигмунд изучают композицию сингулярных операторов вида

$$Ku = au(x) + \int\limits_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)\,dy. \tag{21}$$

Выделяются два класса операторов: 1) класс $\mathcal{A}$ операторов с характеристикой $f(\theta)$, бесконечно дифференцируемой по декартовым координатам точки θ; 2) класс $\mathcal{A}_p$ операторов, для которых конечна величина

$$\|K\|_p = |a| + \left[\int\limits_S |f(\theta)|^p\,dS\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Доказывается, что оба класса замкнуты по отношению к умножению операторов; если K и L — два оператора класса $\mathcal{A}_p$, то

$$\|KL\|_p \leqslant A_p \|K\|_p \cdot \|L\|_p,$$

где A_p зависит только от p.

В статье [7] рассматривается оператор Лапласа Δ, заданный на функциях, определенных почти всюду в пространстве E_m и имеющих там вторые обобщенные производные, суммируемые по E_m с некоторой степенью p, $1 < p < \infty$. Строится оператор $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ и доказывается, что

$$\Lambda f = i\sum_{k=1}^{m} R_k \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

где

$$R_k g = i\pi^{-\frac{m+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \int\limits_{E_m} \frac{y_k - x_k}{r^{m+1}} g(y)\,dy.$$

Любой линейный дифференциальный оператор вида

$$Lu = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}},$$

где функция $u(x)$ и коэффициенты $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$ определены на всем пространстве E_m, можно представить в виде

$$Lu = H(\Lambda^k u),$$

где H — сингулярный оператор, символ которого просто выражается через коэффициенты $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Это обстоятельство, отмеченное А. Кальдероном [2], было использовано им, а также М. Ямагути [1] при исследовании задачи Коши для гиперболических уравнений и систем.

К исследованиям А. Кальдерона и А. Зигмунда примыкают работы С. Коидзуми [1, 2], в которых устанавливается ограниченность операторов вида (18), при выполнении условия (20), в некоторых пространствах Орлича. В несколько иных условиях ограниченность сингулярных операторов в пространствах Орлича установил И. Б. Симоненко [1].

При всей их значительности, результаты А. Кальдерона и А. Зигмунда трудно использовать для исследования сингулярных интегральных уравнений; для этой цели удобнее теоремы, сформулированные в терминах символа, а не в терминах характеристики, как у названных авторов.

8°. В статье [14] автора была исследована первая краевая задача для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ в шаре. Как известно, решение этой задачи весьма просто строится с помощью фундаментального решения уравнения Лапласа; это позволило установить, что вторые производные от решения уравнения Пуассона выражаются в виде некоторых сингулярных интегралов от функции f. Отсюда и из упомянутых выше результатов автора следует оценка вида

$$\|D^2 u\| \leqslant C \|f\|, \qquad C = \mathrm{const}, \tag{$*$}$$

где D^2 — любая производная второго порядка, и норма берется в пространстве L_2. Из результатов А. Кальдерона и А. Зигмунда следует также, что эта оценка верна и в L_p при любом $p > 1$. И. Н. Векуа [1] отмечает, что аналогичная оценка для старших производных имеет место и для полигармонического уравнения; на этом И. Н. Векуа основывает некоторый метод решения квазилинейных эллиптических уравнений. Для случая двух переменных оценка $(*)$ в L_2 была впервые и из других соображений получена С. Н. Бернштейном более 50 лет тому назад (см. по этому поводу, например, его заметку [1]). Для общего уравнения эллиптического типа второго порядка с любым числом переменных и для первой краевой задачи в случае достаточно гладкой границы области оценка $(*)$ в L_2 была получена в 1950—1951 гг. Р. Каччополи (см., например, К. Миранда

[1]). О. А. Ладыженская [1] в это же время распространила метод С. Н. Бернштейна на уравнения того же типа, но, кроме задачи Дирихле, ею были рассмотрены также вторая и третья краевые задачи. Метод С. Н. Бернштейна дополнен О. А. Ладыженской довольно тонким исследованием появляющихся при этом поверхностных интегралов. О. В. Гусева [1] получила аналогичную оценку для старших производных решений эллиптических уравнений высших порядков и сильно эллиптических систем. Для пространств L_p результаты того же рода получены А. И. Кошелевым [1]. В упомянутых работах О. В. Гусевой и А. И. Кошелева так же, как и в работе автора [14], использовано представление решения через фундаментальное решение эллиптического уравнения или системы.

9°. В работах Дж. Кона [1] и Р. Сили [1] исследуются сингулярные интегралы, распространенные по дифференцируемым многообразиям, а также интегральные уравнения, содержащие такие интегралы. Характеристики предполагаются бесконечно дифференцируемыми.

10°. Исследованию сингулярных интегральных уравнений посвящены работы автора [19—22]. В статье [19] даны условия, которые достаточно наложить на символ оператора

$$a(x)\,u(x)+\int\limits_{E_m}\frac{f(x,\,\theta)}{r^m}\,u(y)\,dy, \tag{22}$$

чтобы этот оператор был ограничен в $L_2(E_m)$. Это позволяет исследовать сингулярные уравнения в пространстве $L_2(E_m)$; полученные при этом основные результаты таковы. Если символ удовлетворяет некоторым требованиям гладкости, то многомерное сингулярное интегральное уравнение допускает регуляризацию тогда и только тогда, когда модуль его символа имеет положительную нижнюю грань. В этом случае уравнение допускает также и эквивалентную регуляризацию, и для него справедливы теоремы Фредгольма. Теорема о регуляризации распространяется и на системы сингулярных уравнений, а также на тот случай, когда сингулярный интеграл, входящий в уравнение, распространен по произвольному замкнутому ляпуновскому многообразию.

В недавно появившейся работе И. Ц. Гохберг [3] показал, что условие необращения символа в нуль не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы сингулярное уравнение допускало регуляризацию в L_2. *Было бы весьма интересно доказать аналогичную теорему для пространства L_p.*

Для решения сингулярных уравнений в L_p оказалось небезынтересным исследовать проблему мультипликаторов интегралов Фурье (см. Добавление). Теорема, относящаяся к этой проблеме, была дана автором в статьях [20, 21]; эта теорема позволила исследовать наиболее простые уравнения с оператором вида (21). Теорема автора связана с аналогичной теоремой Марцинкевича [1] о рядах Фурье.

Некоторое усиление теоремы автора о мультипликаторах дано, для случая одной независимой переменной, в работе Г. Краббе [1].

11°. В работах А. В. Бицадзе [1—3] и Т. Г. Гегелиа [1, 3—5] исследуются двойные интегралы вида

$$\Phi(x) = \int_S\int \frac{M(x, y)}{r^2}\, \varphi(y)\, dy. \tag{23}$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ — вектор-функции, а $M(x, y)$ некоторая матрица; точка x может занимать любое положение в трехмерном пространстве. Если $x \in S$, то интеграл (23), очевидно, сингулярный. Для интегралов (23) установлен ряд свойств, сходных с известными свойствами интегралов типа Коши. В некоторых частных случаях построены формулы для решения сингулярных уравнений, содержащих интегралы вида (23). Пусть (А. В. Бицадзе [3])

$$M(x, y) = -D^*\left(\frac{d}{dy_1}, \frac{d}{dy_2}, \frac{d}{dy_3}\right)\frac{1}{r}\, D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

где

$$D^*(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & 0 & Z & -Y \\ Y & -Z & 0 & X \\ Z & Y & -X & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & 0 & -Z & Y \\ Y & Z & 0 & -X \\ Z & -Y & X & 0 \end{pmatrix}$$

и α_1, α_2, α_3 — направляющие косинусы нормали ν к поверхности S в точке Q; поверхность S предполагается замкнутой ляпуновской.

Рассмотрим уравнение

$$A\varphi(x)+\frac{B}{2\pi}\iint\limits_S M(x, y)\varphi(y)\,dS_y=f(x), \quad x\in S, \tag{24}$$

в котором $\varphi(x)$ и $f(x)$ — четырехмерные векторы, A и B — постоянные квадратные матрицы четвертого порядка, удовлетворяющие следующим условиям: а) $\det(A+B)\neq 0$, $\det(A-B)\neq 0$; б) матрица $G=(A+B)^{-1}(A-B)$ имеет вид

$$G=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ -g_2 & g_1 & -g_4 & g_3 \\ -g_3 & g_4 & g_1 & -g_2 \\ -g_4 & -g_3 & g_2 & g_1 \end{pmatrix}.$$

Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем, меньшим единицы, то уравнение (24) имеет единственное решение, удовлетворяющее тому же условию; это решение дается формулой

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}\right]f(x)+$$
$$+\frac{1}{4\pi}(G-I)\iint\limits_S M(x, y)(A-B)^{-1}f(y)\,dS_y,$$

здесь I — единичная матрица.

В статье [2] Т. Г. Гегелиа рассматривает сингулярный оператор вида (23) при довольно общих предположениях относительно поверхности S и матрицы $M(x, y)$ и устанавливает некоторые классы функций, которые оператор (23) либо сохраняет, либо переводит в некоторые другие данные классы.

В статье [6] Т. Г. Гегелиа устанавливается ограниченность сингулярных операторов в пространствах L_p с весом, который обращается в нуль или в бесконечность в конечном числе точек области интегрирования или ее границы; эта область предполагается конечной.

Близкую теорему для случая, когда сингулярный интеграл распространен по евклидову пространству E_m, доказал Е. М. Стейн [1]. Пусть характеристика $f(x, \theta)$ удовлетворяет при некотором p, $1 < p < \infty$, условиям упомянутой выше теоремы 2.1 А. Кальдерона и А. Зигмунда и пусть постоянная β удовлетворяет неравенству $-\frac{m}{p} < \beta < \frac{m}{p'}$. Тогда сингулярный интеграл

$$\int\limits_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy$$

ограничен в пространстве $L_p\left(|x|^\beta;\ E_m\right)$ функций, суммируемых в E_m со степенью p и с весом $|x|^\beta$.

Т. Г. Гегелиа [7] доказал ряд интересных теорем о дифференциальных свойствах функций, представимых сингулярными интегралами.

12°. В статье А. М. Кускова [1] дано приложение сингулярных уравнений к трехмерной задаче о дифракции установившихся упругих колебаний при условии, что граница среды закреплена; само собой разумеется, отсюда, как частный случай, получается и соответствующая статическая задача.

В статье [1] В. Д. Купрадзе сводит к системе сингулярных уравнений не только первую, но и вторую краевую задачу трехмерной теории упругости; в этой статье рассматривается задача об установившихся упругих колебаниях и, как ее частный случай, — задача статики. Для статического случая по существу те же уравнения получили в более поздней работе Н. Киносита и Т. Мура [1]; эти авторы не заметили, однако, что полученные ими уравнения — сингулярные, и полагают, что дело идет о фредгольмовских уравнениях с разрывными ядрами.

В работах [2—5] В. Д. Купрадзе применил метод сингулярных интегральных уравнений к трехмерным задачам теории упругости для изотропных, но неоднородных сред. Как и в статье [1], В. Д. Купрадзе и здесь исследует случай установившихся упругих колебаний, откуда, как частный случай, получается статическая задача.

13°. В работе А. К. Колосовской и И. А. Ицковича [1] изучаются некоторые нелинейные сингулярные уравнения с двумя независимыми переменными. В частности, рассмотрено уравнение

$$u(x)+\lambda\int_S\int \frac{K(x, y)}{r^2}\Phi(u(y))\,dS_y=F(x). \tag{25}$$

Здесь S — ляпуновская поверхность, а $K(x, y)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости и, само собой разумеется, необходимому условию существования сингулярного интеграла в (25). Уравнение исследуется в предположении, что на некотором сегменте $|u|\leqslant a$ производная $\Phi'(u)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем единица и что $\Phi(0)=0$.

Авторы вводят пространство функций $u(x)$, заданных на поверхности S и удовлетворяющих на ней условию Липшица с некоторым показателем α, где $0<\alpha<1$; норма в этом пространстве определяется формулой

$$\|u\| = \max|u|+\sup\frac{|u(x)-u(y)|}{r^\alpha}. \tag{26}$$

Доказывается, что (A и B — постоянные)

$$\|\Phi(u)\|\leqslant A\,\|u\|, \qquad \|\Phi(u)-\Phi(v)\|\leqslant B\,\|u-v\|;$$

эти неравенства верны, если $\|u\|\leqslant a$, $\|v\|\leqslant a$. Отсюда, как показывают авторы, вытекает, что при достаточно малых λ уравнение (25) разрешимо по методу последовательных приближений, которые сходятся в норме (26).

14°. Упомянем еще работы Т. А. Эбаноидзе [1—3], в которых изучаются двойные сингулярные интегралы с неподвижной особенностью; аналогичные уравнения с одной независимой переменной рассматривал А. Р. Хволес [1]. Т. А. Эбаноидзе рассматривает сингулярные уравнения как линейные, вида

$$\varphi(P)-\lambda\int_S\int \frac{K(P, Q)}{r^2}\psi(\vartheta)\varphi(Q)\,dS_Q=f(P), \tag{27}$$

так и нелинейные, вида

$$\varphi(P)-\lambda\int_S\int \frac{K(P, Q, \varphi(Q))}{r^2}\psi(\vartheta)\,dS_Q=0; \tag{28}$$

в статье [3] рассмотрены бесконечные системы линейных уравнений указанного выше вида. В уравнениях (27) и (28) P и Q — точки на плоскости, S — круг радиуса единица с центром в начале, r и ϑ — полярные координаты точки Q относительно начала координат, $\psi(\vartheta)$ — суммируемая функция, такая, что

$$\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\, d\vartheta = 0.$$

Автор доказывает, что уравнения (27) и (28) разрешимы при достаточно малых λ, если только ядра (и свободный член в уравнении (27)) удовлетворяют некоторым условиям гладкости.

§ 2. Некоторые теоремы о линейных уравнениях в банаховых пространствах

1°. Пусть X — банахово пространство и A — замкнутый оператор, действующий из X в банахово же пространство X_1. Будем говорить, что оператор A допускает регуляризацию, если существует такой ограниченный оператор B, действующий из X_1 в X, что

$$BA = I + T, \tag{1}$$

где I тождественный, а T — вполне непрерывный[1]) оператор в X; оператор B будем в этом случае называть *регуляризатором* оператора A. Если B регуляризатор оператора A, то, очевидно, B есть регуляризатор оператора $A + T_1$, каков бы ни был вполне непрерывный оператор T_1. Если A ограниченный оператор, то $B + T_2$ есть регуляризатор оператора A, каков бы ни был вполне непрерывный оператор T_2.

Будем говорить, что оператор A допускает *эквивалентную регуляризацию*, если существует такой регуляризатор B (*эквивалентный* регуляризатор), что уравнения

$$Au = f \tag{2}$$

[1]) В дальнейшем буква T, без индексов или снабженная теми или иными индексами, всегда будет обозначать вполне непрерывный оператор.

и

$$BAu = Bf \tag{3}$$

эквивалентны, каков бы ни был свободный член $f \in X_1$.

В последующем, как обычно, звездочка будет обозначать сопряженное пространство или сопряженный оператор. Решения однородного уравнения

$$Au = 0 \tag{4}$$

называются *нулями* оператора A или уравнения (4); если оператор A линейный и замкнутый, то его нули образуют подпространство, размерность которого будем называть *числом нулей* оператора.

Теорема 1.2. *Если оператор допускает регуляризацию, то он имеет не более конечного числа нулей.*

Пусть B — регуляризатор для A. Уравнение

$$BAu = u + Tu = 0 \tag{5}$$

имеет не более конечного числа нулей. Тем же свойством, очевидно, обладает и уравнение (4), каждое решение которого удовлетворяет и уравнению (5).

Как известно, оператор A называется нормально разрешимым, если для разрешимости уравнения (2) достаточно (необходимость этого условия тривиальна), чтобы его свободный член был ортогонален ко всем нулям сопряженного оператора A^*.

Теорема 2.2. *Если замкнутый оператор допускает регуляризацию, то он нормально разрешим.* [1])

В силу известной теоремы Хаусдорфа достаточно доказать, что множество $R(A)$ значений оператора A замкнуто.

Пусть $f \in R(A)$. Существует элемент $\varphi_0 \in D(A)$ такой, что $A\varphi_0 = f$. Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ какой-либо базис подпространства нулей оператора A, то общее решение уравнения $A\varphi = f$ есть

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j, \tag{6}$$

где a_j — произвольные постоянные. Как доказал Ф. Рис [1], среди элементов (6) существует хотя бы один элемент $\tilde{\varphi}$

[1]) См. заметки автора [10] и [24].

с наименьшей нормой. Докажем существование такой постоянной C, что

$$\|\tilde{\varphi}\| \leqslant C\|f\|, \qquad f \in R(A). \tag{7}$$

Пусть B — регуляризатор оператора A, так что

$$BA\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} + T\tilde{\varphi} = Bf,$$

и оператор T вполне непрерывен. Допустим, что отношение $\frac{\|\tilde{\varphi}\|}{\|f\|}$ неограничено. Тогда существует такая последовательность $\tilde{\varphi}^{(n)}$ и соответствующая ей последовательность $f^{(n)}$, что $\|f^{(n)}\| \to 0$ и $\|\tilde{\varphi}^{(n)}\| = 1$. Из ограниченной последовательности $\{\tilde{\varphi}^{(n)}\}$ можно выделить такую частичную последовательность $\{\tilde{\varphi}^{(n_k)}\}$, чтобы выражение $T\tilde{\varphi}^{(n_k)}$ стремилось к некоторому пределу, который мы обозначим через $-\varphi^{(0)}$. Из уравнения $\tilde{\varphi}^{(n_k)} + T\tilde{\varphi}^{(n_k)} = f^{(n_k)}$ следует теперь, что $\tilde{\varphi}^{(n_k)} \to \varphi^{(0)}$. Вместе с тем $A\tilde{\varphi}^{(n_k)} = f^{(n_k)} \to 0$. Так как оператор A замкнут, то $\varphi^{(0)} \in D(A)$ и $A\varphi^{(0)} = 0$. Отсюда $A(\tilde{\varphi}^{(n)} - \varphi^{(0)}) = f^{(n)}$. Из всех решений уравнения $A\varphi = f^{(n)}$ решение $\tilde{\varphi}^{(n)}$ имеет наименьшую норму, поэтому $\|\tilde{\varphi}^{(n)} - \varphi^{(0)}\| \geqslant \|\tilde{\varphi}^{(n)}\| = 1$, что противоречит соотношению $\tilde{\varphi}^{(n_k)} \to \varphi^{(0)}$. Неравенство (7) доказано.

Пусть теперь $f \in \overline{R(A)}$. Существует такая последовательность $\{f_n\}$, что $f_n \in R(A)$ и $f_n \to f$. Каждому элементу f_n приведем в соответствие элемент $\tilde{\varphi}_n$ с наименьшей нормой, удовлетворяющий уравнению $A\tilde{\varphi}_n = f_n$. Воздействуя на обе части этого уравнения оператором B, получим $\tilde{\varphi}_n + T\tilde{\varphi}_n = Bf_n$. В силу неравенства (7) нормы элементов $\{\tilde{\varphi}_n\}$ ограничены в совокупности; можно выделить такую частичную последовательность $\{\tilde{\varphi}_{n_k}\}$, что $T\tilde{\varphi}_{n_k}$ сходится к некоторому пределу. Регуляризатор B ограничен, поэтому $Bf_{n_k} \to Bf$; отсюда следует, что $\tilde{\varphi}_{n_k}$ сходится к некоторому пределу φ. Теперь $\tilde{\varphi}_{n_k} \to \varphi$ и $A\tilde{\varphi}_{n_k} = f_{n_k} \to f$; в силу замкнутости оператора A имеем $\varphi \in D(A)$ и $A\varphi = f$, так что $f \in R(A)$ и множество $R(A)$ замкнуто.

2°. Пусть A замкнутый оператор, и пусть хотя бы один из двух операторов A и A^* имеет конечное число нулей. Тогда индексом оператора A называется разность между числами нулей операторов A и A^*. Индекс оператора A будем обозначать через $\operatorname{Ind} A$.

Теорема 3.2.[1]) *Пусть ограниченный оператор A допускает регуляризацию и имеет конечный индекс. Тогда для любого вполне непрерывного оператора T*

$$\operatorname{Ind}(A+T)=\operatorname{Ind} A.$$

Пусть B — регуляризатор оператора A. Уравнения типа Риса — Шаудера[2]) $BA\varphi=0$, $A^*B^*\psi=0$ имеют одно и то же число r нулей. Пусть n, n^*, m, m^* суть, соответственно, числа нулей операторов A, A^*, B, B^*. Очевидно, $n\leqslant r$ и $m^*\leqslant r$.

Подсчитаем число r. Обозначим через φ_j, $j=1, 2, \ldots, n$, и χ_k, $k=1, 2, \ldots, m$, базисы подпространств нулей операторов A и B соответственно. Если φ удовлетворяет уравнению $BA\varphi=0$, то

$$A\varphi=\sum_{k=1}^{m} c_k\chi_k, \tag{8}$$

где c_k — некоторые постоянные. В силу теоремы 2.2, для разрешимости уравнения (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{m} c_k(\chi_k, \psi_j)=0, \qquad j=1, 2, \ldots, n^*, \tag{9}$$

где ψ_j — нули оператора A^*. Пусть s означает ранг матрицы $\|(\chi_k, \psi_j)\|$. Общее решение системы (9) зависит от $m-s$ произвольных постоянных, и уравнение (8) имеет $r=n+m-s$ линейно независимых решений.

---

[1]) Теорема 3.2 была доказана Ф. Нетером [1] для одномерных сингулярных уравнений и автором [11] для случая, когда A — ограниченный в некотором гильбертовом пространстве оператор. Доказательство автора дословно переносится на сформулированный здесь общий случай.

[2]) Так мы называем уравнения вида $u+Tu=f$, где оператор T вполне непрерывен.

Оператор A^* является регуляризатором ограниченного оператора B^*. Повторяя предшествующие рассуждения, найдем, что $r = m^* + n^* - s$. Отсюда

$$\operatorname{Ind} A = n - n^* = m^* - m = -\operatorname{Ind} B. \qquad (10)$$

Только что проведенные рассуждения основаны на допущении, что число m конечно. Докажем, что в условиях теоремы всегда $m < \infty$. Допустим противное. Возьмем произвольно большое натуральное число μ и рассмотрим уравнение

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{\mu} c_k \chi_k. \qquad (8a)$$

Если выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{\mu} c_k (\chi_k, \psi_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n^*, \qquad (9a)$$

то уравнение (8a) разрешимо. Пусть ранг матрицы системы (9a) равен σ. Тогда уравнение (8a) имеет $n + \mu - \sigma$ решений. Все они удовлетворяют уравнению $BA\varphi = 0$, поэтому $r \geqslant n + \mu - \sigma$. Но $\sigma \leqslant n^*$, а μ произвольно велико. Отсюда $r = \infty$, что невозможно.

Аналогичные выкладки проделаем для оператора $A + T$. Он удовлетворяет первому условию теоремы: он ограничен и имеет регуляризатор B. Заранее, однако, неизвестно, будет ли индекс оператора $A + T$ конечным, иначе говоря, будет ли конечным число нулей сопряженного оператора $A^* + T^*$. Но, как уже было указано, регуляризатор B имеет конечное число нулей. Оператор $A^* + T^*$ является регуляризатором для оператора B^*, который ограничен и, по доказанному, имеет конечный индекс, а тогда, как было установлено выше, число нулей оператора $A^* + T^*$ конечно. Теперь остается повторить предшествующие рассуждения, чтобы убедиться в справедливости равенств

$$\operatorname{Ind}(A + T) = -\operatorname{Ind} B = \operatorname{Ind} A.$$

З а м е ч а н и е. Из только что сказанного вытекает, что утверждение теоремы 3.2 и, в частности, равенство $\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} B$ остаются в силе, если допустить, что ограниченный оператор A допускает регуляризацию, а регуляризатор B

имеет конечное число нулей; при этом каждый из операторов A^* и B^* также имеет конечное число нулей.

Следствие.[1]) *Сохраним условия и обозначения теоремы* 3.2. *Пусть оператор* C *таков, что* $\|B\| \cdot \|C\| < 1$. *Тогда* $\operatorname{Ind}(A+C) = \operatorname{Ind} A$.

Имеем $BA = I + T$. Отсюда

$$B(A+C) = I + BC + T = (I+BC)\left[I + (I+BC)^{-1}T\right] = \\ = (I+BC)(I+T_1).$$

Оператор $A+C$ имеет, как нетрудно видеть, регуляризатор $(I+BC)^{-1}B$, число нулей которого совпадает с числом нулей оператора B и потому конечно. Из сделанного выше замечания следует, что

$$\operatorname{Ind}(A+C) = -\operatorname{Ind}(I+BC)^{-1}B.$$

Рассмотрим сопряженные уравнения

$$(I+BC)^{-1}Bu = 0, \qquad B^*(I+C^*B^*)^{-1}v = 0.$$

Первое из этих уравнений равносильно уравнению $Bu = 0$, поэтому (что уже было отмечено выше) операторы B и $(I+BC)^{-1}B$ имеют одно и то же число нулей. Подстановка

$$(I+C^*B^*)^{-1}v = w, \qquad v = (I+C^*B^*)w$$

позволяет убедиться, что операторы B^* и $B^*(I+C^*B^*)^{-1}$ также имеют одно и то же число нулей. Отсюда $\operatorname{Ind}(I+BC)^{-1}B = \operatorname{Ind} B$ и, следовательно, $\operatorname{Ind}(A+C) = -\operatorname{Ind} B = \operatorname{Ind} A$.

Очевидно, условие $\|B\| \cdot \|C\| < 1$ можно заменить условием, что оператор $I+BC$ обратим, т. е., что оператор $(I+BC)^{-1}$ существует, определен на всем пространстве и ограничен.

Теорема 4.2.[2]) *Пусть A и B ограниченные опера-*

---

[1]) Более общее утверждение см. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [1].

[2]) Теорема 4.2 доказана Ф. В. Аткинсоном [1]; для одномерных сингулярных уравнений и их систем эта теорема была известна ранее (см. Ф. Нетер [1], Н. И. Мусхелишвили [1]). Более общую теорему доказал И. Ц. Гохберг [2] (см. также И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [1]).

торы, подчиненные следующим требованиям: 1) *операторы A и B нормально разрешимы;* 2) *операторы A, A^*, B, B^* имеют конечные числа нулей. Тогда*

$$\operatorname{Ind}(BA) = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B. \tag{11}$$

Базисы подпространств нулей операторов A, A^*, B, B^* обозначим соответственно через

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n; \quad \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n^*};$$
$$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \quad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m^*}.$$

Пусть s — ранг матрицы $\|(\chi_k, \psi_j)\|$. Повторяя рассуждения теоремы 3.2, найдем, что оператор BA имеет $n+m-s$ нулей, а сопряженный с ним оператор A^*B^* имеет m^*+n^*-s нулей. Отсюда

$$\operatorname{Ind}(BA) = n + m - m^* - n^* = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B.$$

Лемма 1.2. *Пусть B ограниченный оператор. Для того чтобы уравнения $A\varphi = f$ и $BA\varphi = Bf$ были эквивалентны при любом свободном члене f, необходимо и достаточно, чтобы оператор B не имел нулей, кроме тривиального $\chi = 0$.*

Пусть упомянутые в условии леммы уравнения эквивалентны при любом свободном члене, и пусть χ удовлетворяет уравнению $B\chi = 0$. Уравнение $BA\varphi = 0$ эквивалентно сразу двум уравнениям $A\varphi = \chi$ и $A\varphi = 0$; отсюда $\chi = 0$. С другой стороны, если условие леммы выполнено, то из уравнения $BA\varphi - Bf = B(A\varphi - f) = 0$ вытекает, что $A\varphi - f = 0$.

Теорема 5.2. [1]) *Для того чтобы оператор допускал эквивалентную регуляризацию, необходимо и достаточно, чтобы он был нормально разрешим и чтобы его индекс был конечным и неотрицательным.*

Пусть оператор A допускает эквивалентную регуляризацию, и пусть B эквивалентный регуляризатор. По теореме 2.2 оператор A нормально разрешим, а по теореме 1.2 он имеет только конечное число нулей. Обозначим через ω_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимые нули уравнения типа Риса — Шаудера $(BA)^*\omega = A^*B^*\omega = 0$. Уравнение $BA\varphi = Bf$, а с ним и эквивалентное ему уравнение $A\varphi = f$ разрешимо

[1]) См. заметки автора [8, 23].

тогда и только тогда, когда

$$(Bf,\ \omega_k)=(f,\ B^*\omega_k)=0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{12}$$

Элементы $\psi_k=B^*\omega_k$ удовлетворяют уравнению $A^*\psi_k=0$. Решений, линейно независимых с ψ_k, это уравнение не имеет. Действительно, пусть $\tilde{\psi}$ такое решение. Тогда для разрешимости уравнения $A\varphi=f$ необходимо $(f,\ \tilde{\psi})=0$, что противоречит достаточности условий (12). Таким образом, оператор A^* имеет не более n нулей, тогда как оператор A имеет их ровно n — столько же, сколько их имеет оператор BA, так как уравнения $BA\varphi=0$ и $A\varphi=0$ эквивалентны. Отсюда $\operatorname{Ind} A\geqslant 0$, и необходимость условий теоремы доказана.

Обратимся к доказательству достаточности. Пусть φ_1, $\varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$ и $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n^*}$ — базисы подпространств нулей операторов A и A^*, причем $n^*\leqslant n$. Пусть $D(A)$ — область определения оператора A — расположена в банаховом пространстве X, а область $R(A)$ значений этого оператора — в банаховом пространстве X_1. Через X'' обозначим пространство нулей оператора A. Построим функционалы $\alpha_j\in X^*$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, так, чтобы $(\alpha_j,\ \varphi_k)=\delta_{jk}$. Эти равенства определяют функционалы α_j на подпространстве X''; по теореме Хана — Банаха их можно распространить на все пространство X.

Для любого элемента $u\in X$ положим $u=u'+u''$, где

$$u'=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k,\ u)\,\varphi_k.$$

Элементы вида u'' характеризуются тем, что они ортогональны к α_k, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; множество этих элементов образует некоторое подпространство X' пространства X, которое само является, таким образом, прямой суммой подпространств X' и X''.

Допустим пока, что $n^*>0$. Как известно, [1]) можно найти такие элементы $\omega_k\in X_1$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n^*$, что $(\psi_j,\ \omega_k)=\delta_{jk}$. Обозначим через X_1'' n^*-мерное подпространство пространства X_1 с базиссм $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{n^*}$ и через X_1' подпространство того же пространства, ортогональное к $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n^*}$.

---

[1]) См Л. В Канторович и Г. П. Акилов [1], стр. 149—150.

Очевидно, $X_1 = X_1' \dotplus X_2''$. В подпространстве X' определим оператор A_1, положив $A_1 u = Au$, $u \in D(A) \cap X'$. По условию теоремы $R(A_1) = R(A) = X_1'$. Оператор A_1 имеет обратный A_1^{-1}, определенный на всем подпространстве X_1' и замкнутый как обратный замкнутому. Отсюда следует, что оператор A_1^{-1} ограничен. Расширим его до некоторого ограниченного оператора B, определенного всюду на X_1, для чего положим

$$B\omega_j = \varphi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n^*.$$

Докажем, что B есть эквивалентный регуляризатор для A. Прежде всего, B не имеет нулей. Действительно, пусть $Bu_1 = 0$. Положим $u_1 = u_1' + u_1''$, где $u_1' \in X_1'$, $u_1'' \in X_1''$. Тогда $0 = Bu_1 = A_1^{-1}u_1' + Bu_1''$. Здесь $A_1^{-1}u_1' \in X'$, $Bu_1'' \in X''$; но X' и X'' имеют общим только нулевой элемент, поэтому $A_1^{-1}u_1 = 0$ и $Bu_1'' = 0$. Отсюда $u_1' = u_1'' = 0$ и, следовательно, $u_1 = 0$.

Остается доказать, что оператор $BA - I$ вполне непрерывен. Если $u \in D(A)$, то $Au \in X_1$ и $BAu = A_1^{-1}Au$. Пусть $u = u' + u''$, где $u' \in X'$, $u'' \in X''$. Очевидно, $X \subset D(A)$, поэтому $u' \in D(A)$ и $Au = Au' = A_1 u'$. Теперь

$$BAu = u' = u - \sum_{j=1}^{n^*} (\alpha_j, u)\,\varphi_j;$$

вычитаемое есть оператор конечномерный и, следовательно, вполне непрерывный.

Мы предполагали, что $n^* > 0$. Если $n^* = 0$, то доказательство упрощается: в этом случае $X_1' = X_1$ и $B = A_1^{-1}$.

Теорема 6.2.[1]) *Пусть A линейный оператор в гильбертовом пространстве и $f \in D(A^*)$. Если уравнение $Au = f$ разрешимо, то оно эквивалентно уравнению $A^*Au = A^*f$.*

Пусть $Au_0 = f$; очевидно, что также $A^*Au_0 = A^*f$. Пусть последнему уравнению удовлетворяет еще элемент u_1, так что $A^*Au_1 = A^*f$; докажем, что $Au_1 = f$. Вычитая, находим $A^*A(u_1 - u_0) = 0$. Умножив скалярно на $u_1 - u_0$, получим

---

[1]) См. заметку автора [9].

$0=(A^*A(u_1-u_0),\ u_1-u_0)=(A(u_1-u_0),\ A(u_1-u_0))$. Отсюда $A(u_1-u_0)=0$ или $Au_1=Au_0=f$, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема 5.2 дает полную характеристику множества операторов, допускающих эквивалентную регуляризацию. Можно дать [1]) такую же характеристику множества операторов, допускающих регуляризацию вообще: для того, чтобы оператор допускал регуляризацию, необходимо и достаточно, чтобы он был нормально разрешим и имел конечное число нулей. Было бы интересно дать характеристику множества операторов, имеющих „неограниченный регуляризатор“. Точнее говоря, речь идет о таких операторах A, для которых существует неограниченный оператор B, удовлетворяющий соотношению $BA=I+T$, T — вполне непрерывный оператор. В работе Д. И. Шермана [1] изучены одномерные сингулярные операторы такого сорта. В частности, было бы интересно выяснить, может ли уравнение $Au=f$ иметь решение, если A имеет неограниченный регуляризатор B, а свободный член этого уравнения f не входит в область $D(B)$. Желательно было бы также указать простые необходимые или достаточные условия для того, чтобы оставалась в силе теорема о нормальной разрешимости или теорема об устойчивости индекса (по отношению к добавлению вполне непрерывного слагаемого) оператора, имеющего неограниченный регуляризатор.

§ 3. Стереографическая проекция

Стереографической проекцией называется преобразование m-мерного евклидова пространства E_m в единичную сферу Σ $(m+1)$-мерного пространства E_{m+1}, осуществляемое по формулам

$$\xi_k=\frac{2x_k}{x^2+1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$
$$\xi_{m+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}\qquad\left(x^2=|x|^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right).\tag{1}$$

[1]) По крайней мере в случае гильбертова пространства; см. И. Ц. Гохберг [1].

Стереографическую проекцию можно геометрически осуществить следующим образом. Отождествим пространство E_m с плоскостью $\xi_{m+1}=0$ пространства E_{m+1}. Пусть в этой плоскости дана точка x с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Соединим ее прямой с точкой $(0,0, \ldots, 0,1)$ сферы Σ. Тогда вторая точка пересечения этой прямой со сферой Σ (рис. 1) и сопоставляется точке x по формулам (1).

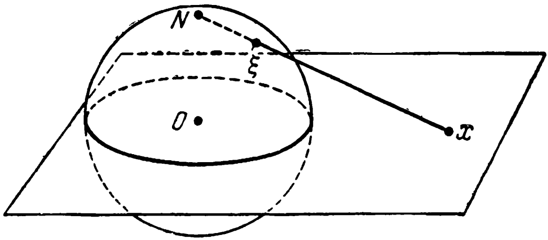

Рис. 1.

Обозначим через r расстояние между точками x и y пространства E_m, а через ρ — расстояние между соответствующими им по стереографической проекции точками ξ и η сферы Σ. Нетрудно установить связь между r и ρ. Имеем

$$\rho^2=\sum_{j=1}^{m+1}(\xi_j-\eta)^2=4\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{x^2+1}-\frac{y_j}{y^2+1}\right)^2+ \\ +\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{y^2-1}{y^2+1}\right)^2;$$

простыми преобразованиями это приводится к виду

$$\rho^2=\frac{4}{(x^2+1)^2(y^2+1)^2}\left\{\sum_{j=1}^{m}[x_j(y^2+1)-y_j(x^2+1)]^2+\right. \\ \left.+(x^2-y^2)^2\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках приводится к виду $r^2(x^2+1)(y^2+1)$, и мы получаем искомое соотношение

$$r^2=\frac{\rho^2}{4}(x^2+1)(y^2+1). \qquad (2)$$

Обозначим через dy элемент объема в пространстве E_m и через $d\sigma$ элемент площади поверхности сферы Σ. Докажем, что

$$dy = \left(\frac{y^2+1}{2}\right)^m d\sigma. \tag{3}$$

Проведем в $(m+1)$-мерном пространстве координат η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ двумерную плоскость Ξ, проходящую через точки y, η и через начало координат (рис. 2). Эта плоскость

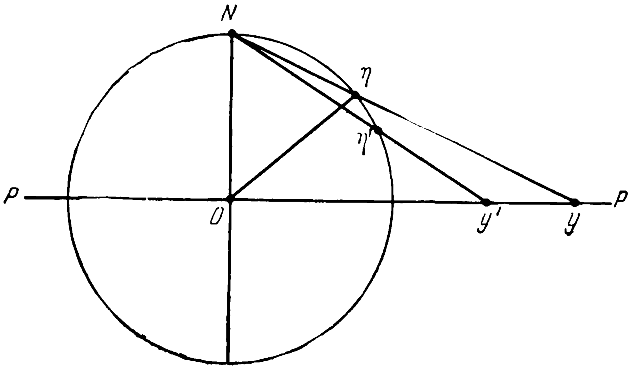

Рис. 2.

пересечет сферу Σ по некоторой окружности, а пространство E_m — по прямой PP, проходящей через начало и нормальной к прямой ON. Элементы $d\sigma$ и dy пересекаются с Ξ по дуге $\eta\eta'$ и отрезку yy' соответственно. Стереографическое преобразование конформно, поэтому

$$\frac{dy}{d\sigma} = \frac{|y'-y|^m}{|\eta'-\eta|^m}.$$

Из формулы (2) видно, что с точностью до бесконечно малого слагаемого

$$\frac{|y'-y|}{|\eta'-\eta|} = \frac{y^2+1}{2},$$

и формула (3) доказана.

Если $m=2$, то стереографическая проекция осуществляет известное преобразование плоскости комплексного переменного на сферу Римана. Имея это в виду, будем впредь сферу Σ называть *римановой сферой*.

§ 4. О некоторых вполне непрерывных операторах

Лемма 1.4. *Пусть D — конечная область пространства E_m, содержащая внутри или на границе начало координат. Пусть $A(x, y)$ — ограниченная функция, $|A(x, y)| < A$, и λ — постоянная, удовлетворяющая неравенству $0 < \lambda < m$. Оператор со слабой особенностью*

$$tu = v(x) = \int\limits_D \frac{A(x, y)}{r^\lambda} u(y)\, dy \tag{1}$$

вполне непрерывен в пространстве $L_p(|x|^\beta; D)$, если

$$-m < \beta < \frac{mp}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{2}$$

Через $L_p(|x|^\beta; D)$ обозначено пространство функций, суммируемых в области D со степенью p и с весом $|x|^\beta$.[1])

Лемма 1.4 хорошо известна, если $\beta = 0$, поэтому мы полагаем далее $\beta \neq 0$.

Докажем прежде всего, что в условиях леммы оператор (1) ограничен. Начнем со случая $\beta > 0$. Положим $|x| = R$, $|y| = \rho$. Имеем

$$\left|R^{\frac{\beta}{p}} v(x)\right| \leqslant AR^{\frac{\beta}{p}} \int\limits_D \frac{1}{r^\lambda} |u(y)|\, dy =$$

$$= AR^{\frac{\beta}{p}} \int\limits_D \frac{1}{r^{\frac{\lambda}{p'}} \cdot \rho^{\frac{\beta}{p}}} \cdot \frac{|u(y)|\, \rho^{\frac{\beta}{p}}}{r^{\frac{\lambda}{p}}}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant AR^{\frac{\beta}{p}} \left\{ \int\limits_D \frac{dy}{r^\lambda \rho^{\frac{\beta p'}{p}}} \right\}^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int\limits_D \frac{|u(y)|^p \rho^\beta}{r^\lambda}\, dy \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

---

[1]) Ограниченность оператора (1) в условиях леммы 1.4 доказана в работе В. П. Глушко [1].

Оценим первый интеграл справа. По известной теореме о композиции интегралов со слабой особенностью, [1])

$$\int\limits_D \frac{dy}{r^\lambda \rho^{\frac{\beta p'}{p}}} \leqslant \begin{cases} C, & \lambda + \frac{\beta p'}{p} < m, \\ C \ln \frac{c_1}{R}, & \lambda + \frac{\beta p'}{p} = m, \quad c_1 = \mathrm{const}, \\ CR^{-\left(\lambda + \frac{\beta p'}{p} - m\right)}, & \lambda + \frac{\beta p'}{p} > m. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь C — постоянная, зависящая от области D; она остается ограниченной, когда область D стягивается в точку. Обозначая для краткости правую часть неравенства (4) через $C\chi(R)$, имеем из неравенства (3)

$$|v(x)|^p R^\beta \leqslant A^p C^p R^\beta [\chi(R)]^{\frac{p}{p'}} \int\limits_D \frac{|u(y)|^p \rho^\beta}{r^\lambda} dy$$

и, следовательно,

$$\|v\|^p \leqslant A^p C^p \int\limits_D |u(y)|^p \rho^\beta dy \int\limits_D \frac{R^\beta [\chi(R)]^{\frac{p}{p'}}}{r^\lambda} dx; \tag{5}$$

норма взята в смысле метрики пространства $L_p(|x|^\beta;\ D)$.

Если $\lambda + \frac{\beta p'}{p} > m$, то

$$R^\beta [\chi(R)]^{\frac{p}{p'}} = R^{\frac{(m-\lambda)p}{p'}},$$

показатель при R положителен, внутренний интеграл в (5) ограничен некоторой постоянной B^p, и мы имеем

$$\|v\| \leqslant ABC \|u\|, \tag{6}$$

что и требовалось доказать. Если $\lambda + \frac{\beta p'}{p} = m$, то $\beta = \frac{(m-\lambda)p}{p'} > 0$, внутренний интеграл в (5) опять ограничен и мы опять приходим к неравенству (6). Наконец, если $\lambda + \frac{\beta p'}{p} < m$, то $\chi(R) = 1$, и если одновременно $\beta > 0$, то, по-прежнему, внутренний интеграл (5) ограничен, и верно неравенство (6).

---

[1]) См., например, книгу автора [12], стр. 72—75.

Если $\beta < 0$, то рассмотрим сопряженный с (1) оператор

$$t^*u = \int\limits_D \frac{\overline{A(y, x)}}{r^\lambda} u(y)\, dy;$$

нетрудно видеть, что если $t \in L_p(R^\beta;\ D) \to L_p(R^\beta;\ D)$, то $t^* \in L_{p'}(R^\gamma;\ D) \to L_{p'}(R^\gamma;\ D)$, где $\gamma = -\frac{\beta p'}{p}$. Для этого достаточно доказать, если $X = L_p(q;\ D)$, то сопряженное пространство $X^* = L_{p'}\left(q^{-\frac{p'}{p}};\ D\right)$. Если $u \in L_p(q;\ D)$, то положим $\tilde{u} = q^{\frac{1}{p}} u$. Это преобразование изометрично переводит $L_p(q;\ D)$ в $L_p(D)$. Пусть f ограниченный линейный функционал в $L_p(q;\ D)$. Введем функционал $\tilde{f}(\tilde{u}) = f\left(q^{-\frac{1}{p}}\tilde{u}\right)$. Он ограничен в $L_p(D)$, потому что

$$|\tilde{f}(\tilde{u})| \leqslant \|f\|_{L_p(q;\ D)} \cdot \left\|q^{-\frac{1}{p}}\tilde{u}\right\|_{L_p(q;\ D)} = \|f\|_{L_p(q;\ D)} \cdot \|u\|_{L_p(D)}.$$

Но тогда

$$\tilde{f}(\tilde{u}) = \int\limits_D \overline{\tilde{F}(x)}\, \tilde{u}(x)\, dx, \quad \tilde{F}(x) \in L_{p'}(D).$$

Отсюда

$$f(u) = \tilde{f}\left(q^{\frac{1}{p}} u\right) = \int\limits_D \overline{F(x)}\, u(x)\, dx,$$

где $F(x) = q^{\frac{1}{p}}(x)\, \tilde{F}(x)$, и ясно, что

$$F(x) \in L_p\left(q^{-\frac{p'}{p}};\ D\right).$$

Вернемся к оператору t^*. В наших условиях $-m < \beta < 0$, но тогда $0 < \gamma < \frac{mp'}{p}$, что совпадает с неравенством (2), в котором p заменено на p'. По доказанному, оператор t^* ограничен в $L_{p'}(R^\gamma;\ D)$, но тогда оператор t ограничен в $L_p(R^\beta;\ D)$ и имеет равную с t^* норму.

Полная непрерывность оператора t доказывается весьма просто. Будем считать, что $\beta > 0$; если бы было $\beta < 0$, мы перешли бы к сопряженному оператору. Формулу (1) представим в виде

$$tu = \int\limits_{r<\eta} \frac{A(x, y)}{r^\lambda} u(y)\,dy + \int\limits_{D \cap (r>\eta)} \frac{A(x, y)}{r^\lambda} u(y)\,dy = t'u + t''u,$$

где η — произвольно малое положительное число. Ядро оператора t'' ограничено, и этот оператор вполне непрерывен в $L_p(R^\beta;\ D)$, в чем легко убедиться, сделав замену $\tilde{u} = uR^{\frac{\beta}{p}}$. Для оператора t' постоянная B, как легко видеть, сколь угодно мала вместе с η, и из неравенства (6) видно, что $\|t'\| \to 0$ при $\eta \to 0$. Отсюда следует, что оператор t вполне непрерывен в $L_p(R^\beta;\ D)$.

Лемма 1.4, очевидно, остается верной, если вес не равен, но эквивалентен R^β, т. е. если его произведение на $R^{-\beta}$ положительно ограничено сверху и снизу. Отсюда легко усмотреть, что лемма остается верной, если область D заменить римановой сферой Σ (см. § 3), а вес R^β — весом $(1-\xi_{m+1})^{\frac{\beta}{2}}$, так как при ξ_{m+1}, близком к единице, веса $(1-\xi_{m+1})^{\frac{\beta}{2}}$ и $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$ на Σ эквивалентны.

Л е м м а 2.4. *Оператор*

$$\int\limits_{E_m} \frac{\varphi(y, \theta) - \varphi(x, \theta)}{r^m} f(x, y)\,u(y)\,dy, \quad r = |y-x|, \quad \theta = \frac{y-x}{r}, \tag{7}$$

вполне непрерывен в $L_p(E_m)$, *если функция* $f(x, y)$ *ограничена, а* $\varphi(x, \theta)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi(y, \theta) - \varphi(x, \theta)| \leqslant A\rho^\lambda, \tag{8}$$

где A *и* λ *положительные постоянные, а* ρ — *расстояние между точками римановой сферы, соответствующими точкам* x *и* y *при стереографическом преобразовании.*

Интеграл (7) обозначим через $v(x)$. Стереографически отобразим пространство E_m на риманову сферу Σ.

Интеграл (7) при этом преобразуется следующим образом:

$$v(x)=\int\limits_{\Sigma}\frac{\varphi(y,\theta)-\varphi(x,\theta)}{\rho^m}f(x,y)\left(\frac{y^2+1}{x^2+1}\right)^{\frac{m}{2}}u(y)\,d\sigma.$$

Положим

$$\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}u(x)=u'(\xi),\quad \left(\frac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}v(x)=v'(\xi). \tag{9}$$

Тогда

$$v'(\xi)=\int\limits_{\Sigma}\frac{\varphi(y,\theta)-\varphi(x,\theta)}{\rho^m}f(x,y)\,u'(\eta)\,d\sigma. \tag{10}$$

Формула (9) осуществляет изометрическое преобразование пространства $L_p(E_m)$ на пространство $L_p(q;\Sigma)$, где вес q равен

$$q(\xi)=\left(\frac{1+x^2}{2}\right)^{-m\left(\frac{p}{2}-1\right)}=(1-\xi_{m+1})^{m\left(\frac{p}{2}-1\right)}.$$

Показатель $\beta=m(p-2)$ удовлетворяет неравенству (2). В силу леммы 1.4 оператор (10) вполне непрерывен в $L_p(q;\Sigma)$, а тогда оператор (7) вполне непрерывен в $L_p(E_m)$.

Заметим, что условие (8) можно записать также в виде

$$|\varphi(y,\theta)-\varphi(x,\theta)|\leqslant cr^\lambda[(1+x^2)(1+y^2)]^{-\frac{\lambda}{2}},\quad c=\text{const}. \tag{11}$$

ГЛАВА II

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 5. Основные понятия

1°. Пусть функция $f(x)$ определена почти всюду на некотором многообразии Γ, на котором определена метрика, и пусть x_0 — некоторая точка на Γ. Выделим из многообразия Γ его часть, точки которой находятся на расстоянии $\leqslant \varepsilon$ от точки x_0. Допустим, что по оставшейся части Γ_ε многообразия Γ функция $f(x)$ суммируема, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(x)\, d\Gamma,$$

то этот предел называется *сингулярным интегралом* функции $f(x)$ по многообразию Γ. В частных случаях Γ может совпадать с пространством E_m или с некоторой его областью.

2°. Рассмотрим сингулярный интеграл вида

$$v(x) = \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy. \tag{1}$$

Здесь x и y — точки пространства E_m, $r = |y - x|$, $\theta = \frac{y-x}{r}$. Точка x называется *полюсом*, функция $f(x, \theta)$ — *характеристикой*, функция $u(y)$ — *плотностью* сингулярного интеграла (1). Предположим пока, что плотность и характеристика удовлетворяют следующим требованиям: 1) в любой ограниченной части пространства E_m плотность $u(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$, $\alpha > 0$; 2) на бесконечности $u(x) = O\left(|x|^{-k}\right)$, $k > 0$; 3) характеристика ограничена и при фиксированном x непрерывна по θ.

Теорема 1.5. [1]) *Если выполнены условия* 1)—3), *то для существования сингулярного интеграла* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_S f(x,\ \theta)\,dS = 0, \tag{2}$$

где S — *единичная сфера, которую пробегает точка* θ.

Имеем

$$\int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y)\,dy = \int_{r>1} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y)\,dy + \\ + \int_{r<1} \frac{f(x,\theta)}{r^m} [u(y)-u(x)]\,dy + u(x) \int_{r<1} \frac{f(x,\theta)}{r^m}\,dy.$$

Первые два интеграла справа сходятся абсолютно. В третьем интеграле введем сферические координаты с центром в x. Тогда $dy = r^{m-1}\,dr\,dS$ и

$$\int_{r<1} \frac{f(x,\theta)}{r^m}\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<r<1} \frac{f(x,\theta)}{r^m}\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\frac{1}{\varepsilon} \int_S f(x,\ \theta)\,dS;$$

предел существует тогда и только тогда, когда условие (2) выполнено.

Во всем последующем условие (2) *всегда предполагается выполненным.*

Коль скоро равенство (2) имеет место, интеграл (1) можно выразить через абсолютно сходящиеся интегралы по формуле

$$\int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y)\,dy = \int_{r>1} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y)\,dy + \\ + \int_{r<1} \frac{f(x,\theta)}{r^m} [u(y)-u(x)]\,dy. \tag{3}$$

Замечание. По определению сингулярного интеграла,

$$\int_{E_m} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{r>\varepsilon} \frac{f(x,\theta)}{r^m} u(y)\,dy.$$

[1]) Теорема 1.5 и формула (4) (см. ниже) доказаны Ф. Трикоми [2] для случая $m=2$.

Если удовлетворены условия 1)—3) и равенство (2), то интеграл в правой части последнего равенства стремится к своему пределу равномерно в любой конечной области изменения точки x. Действительно, при этих условиях

$$\int\limits_{r>\varepsilon} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy = \int\limits_{r>1} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy + \int\limits_{\varepsilon<r<1} \frac{f(x, \theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy;$$

первый интеграл справа от ε не зависит, а второй равномерно сходится к пределу

$$\int\limits_{r<1} \frac{f(x, \theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy.$$

3°. Вырежем точку x областью σ_ε произвольной формы, и пусть диаметр этой области стремится к нулю вместе с ε. Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{E_m-\sigma_\varepsilon} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy. \qquad (*)$$

Пусть $r = \alpha(\varepsilon, x, \theta)$ — уравнение границы области σ_ε допустим, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\alpha(\varepsilon, x, \theta)}{\varepsilon} = \beta(x, \theta) > 0,$$

причем стремление к пределу — равномерное относительно θ. Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{E_m-\sigma_\varepsilon} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{r>1} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy + \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\alpha<r<1} \frac{f(x, \theta)}{r^m} [u(y) - u(x)]\, dy - $$

$$- u(x) \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S} f(x, \theta) \ln \alpha(\varepsilon, x, \theta)\, dS.$$

Условие (2) позволяет представить последний интеграл в виде

$$\int_S f(x,\ \theta)\ln\alpha(\varepsilon,\ x,\ \theta)\,dS = \int_S f(x,\ \theta)\ln\frac{\alpha(\varepsilon,\ x,\ \theta)}{\varepsilon}\,dS;$$

используя формулу (3), получаем окончательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_m-\sigma_\varepsilon}\frac{f(x,\ \theta)}{r^m}u(y)\,dy =$$
$$= \int_{E_m}\frac{f(x,\ \theta)}{r^m}u(y)\,dy - u(x)\int_S f(x,\ \theta)\ln\beta(x,\ \theta)\,dS. \qquad (4)$$

Формула (4) остается в силе и тогда, когда интеграл распространен не по всему пространству E_m, а только по какой-либо его области.

Для существования предела (*) условие (2) не только достаточно, но и необходимо. Действительно, как мы видели, дело сводится к существованию предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_S f(x,\ \theta)\ln\alpha(\varepsilon,\ x,\ \theta)\,dS.$$

Имеем

$$\int_S f(x,\ \theta)\alpha(\varepsilon,\ x,\ \theta)\,dS =$$
$$= \int_S f(x,\ \theta)\ln\frac{\alpha(\varepsilon,\ x,\ \theta)}{\varepsilon}\,dS + \ln\varepsilon\int_S f(x,\ \theta)\,dS.$$

Предел первого слагаемого при $\varepsilon\to 0$ справа существует и равен

$$\int_S f(x,\ \theta)\ln\beta(x,\ \theta)\,dS,$$

а второе слагаемое имеет предел только при выполнении равенства (2).

4°. Пусть D — область пространства E_m, и пусть $f(x,\ \theta)$ и $u(x)$ удовлетворяют условиям 1) — 3) настоящего параграфа. Рассмотрим сингулярный интеграл

$$\int_D K(x,\ y)\,u(y)\,dy, \quad \text{где} \quad K(x,\ y) = \frac{f(x,\ \theta)}{r^m}.$$

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ декартовы координаты точки x и допустим, что функции

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

осуществляют взаимно однозначное и непрерывное отображение области D на некоторую область $D' \in E_m$, причем функции (5) дважды непрерывно дифференцируемы и их якобиан отличен от нуля.

Обозначим через ξ и η образы точек x и y при преобразовании (5), через σ_ε — образ шара $r < \varepsilon$ и через $J(\xi)$ якобиан преобразования (5). Положим еще

$$\rho = |\xi - \eta|, \quad \theta' = \frac{\eta - \xi}{\rho}, \quad u(x) = u'(\xi), \; K(x, y) = K'(\xi, \eta).$$

Легко установить формулы вида

$$r^2 = \rho^2 F^2(\xi, \theta') + O(\rho^3),$$

$$K'(\xi, \eta) = \frac{f'(\xi, \theta')}{\rho^m} + O(\rho^{-\mu}), \qquad \mu < m.$$

Граница области σ_ε определяется уравнением

$$\rho^2 F^2(\xi, \theta') + O(\rho^3) = \varepsilon^2.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\rho}{\varepsilon} = [F(\xi, \theta')]^{-1}.$$

Теперь формула (4) приводит нас к формуле замены переменных в сингулярном интеграле:

$$\int_D K(x, y)\, u(y)\, dy = \int_{D'} K'(\xi, \eta)\, J(\eta)\, u'(\eta)\, d\eta + {}$$
$$+ u'(\xi)\, J(\xi) \int_S f'(\xi, \theta') \ln F(\xi, \theta')\, dS'. \tag{6}$$

5°. К сингулярным интегралам, распространенным по некоторой области евклидова пространства, можно свести при известных условиях сингулярные интегралы вида

$$\int_\Gamma K'(\xi, \eta)\, u'(\eta)\, d\Gamma_\eta, \tag{7}$$

где Γ — ляпуновское многообразие. Пусть ξ и η — точки на Γ, ρ — расстояние между ними в смысле внутренней метрики многообразия Γ, и пусть произведение $\rho^m K'(\xi, \eta)$, где m — размерность многообразия, остается ограниченным при $\eta \to \xi$. По определению, сингулярный интеграл (7) равен

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma-(\rho<\varepsilon)} K'(\xi, \eta)\, u'(\eta)\, d\Gamma_\eta, \tag{8}$$

если этот предел существует. Разобьем Γ на части Γ_1 и Γ_2, первая из которых лежит внутри какой-нибудь из ляпуновских сфер, и допустим, что точка ξ меняется строго внутри Γ_1. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} K'(\xi, \eta)\, u(\eta)\, d\Gamma_\eta = \int\limits_{\Gamma_2} K'(\xi, \eta)\, u'(\eta)\, d\Gamma_\eta + \\ + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma_1-(\rho<\varepsilon)} K'(\xi, \eta)\, u'(\eta)\, d\Gamma_\eta. \tag{9}$$

Отобразим Γ_1 на некоторую область D пространства E_m. Можно потребовать, чтобы это отображение было взаимно однозначным и непрерывным и чтобы его первые производные принадлежали к $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 0$; для простоты допустим, что это преобразование конформно в точке ξ. Обозначим через x и y образы точек ξ и η; положим $r = |y - x|$, $\theta = \frac{y-x}{r}$. Конформность преобразования в точке ξ приводит к тому, что величина

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho}{r} \tag{10}$$

не зависит от θ. Далее, произведение $K'(\xi, \eta)\, d\eta$ перейдет в некоторое произведение вида $K(x, y)\, dy$, причем $r^m K(x, y)$ остается ограниченным при $y \to x$. Положим $K(x, y) = K(x, x + r\theta) = K(x, r, \theta)$; допустим, что имеет место представление

$$K(x, r, \theta) = \frac{f(x, \theta)}{r^m} + \frac{f_1(x, r, \theta)}{r^\mu}, \tag{11}$$

где $\mu < m$ и функции f и f_1 непрерывны. Пользуясь соотношениями (4) и (9) — (11), легко найдем

$$\int\limits_{\Gamma} K'(\xi, \eta)\, u'(\eta)\, d\eta = \int\limits_{\Gamma_2} K'(\xi, \eta)\, d\eta + \\ + \int\limits_{D} \frac{f_1(x, r, \theta)}{r^{\mu}}\, u(y)\, dy + \int\limits_{D} \frac{f(x, \theta)}{r^m}\, u(y)\, dy, \quad (12)$$

где $u(y) = u'(\eta)$; ясно, что характеристика $f(x, \theta)$ необходимо должна удовлетворять условию (2).

6°. Подробнее остановимся на случае, когда сингулярный интеграл распространен по единичной сфере Σ пространства E_{m+1}. Пусть ξ и η — точки сферы Σ. Положим

$$\rho^2 = \sum_{j=1}^{m+1} (\xi_j - \eta_j)^2,$$

где ξ_j и η_j — декартовы координаты точек ξ и η. Проведем диаметр сферы Σ, проходящий через точку ξ, и нормальную к этому диаметру плоскость P, проходящую через точку η. Пусть a — пересечение упомянутого диаметра с плоскостью P. На луче, исходящем из точки a и проходящем через точку η, отметим точку Λ на расстоянии единица от a. Задание числа ρ и точки Λ полностью определяет точку η. Заметим, что Λ пробегает единичную сферу S пространства E_m, а ρ меняется в пределах $0 \leqslant \rho \leqslant 2$.

Обозначим через $d\sigma$ и dS элементы поверхностей сфер Σ и S соответственно. Докажем, что

$$d\sigma = \rho^{m-1}\left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^{\frac{m-2}{2}} d\rho\, dS. \quad (13)$$

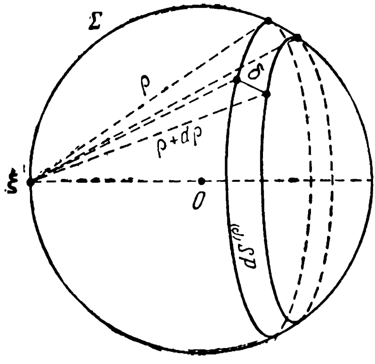

Рис. 3.

В пространстве E_{m+1} проведем сферу радиуса ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 2$, с центром в точке ξ; эта сфера пересекается с Σ (рис. 3) по $(m-1)$-мерной сфере $S^{(\rho)}$, радиус которой, как это легко усмотреть из чертежа, равен $\rho\sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}$. Из того же чертежа видно, что

$$d\sigma = \delta\, dS^{(\rho)} = \delta\rho^{m-1}\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{\frac{m-1}{2}} dS.$$

Далее, δ есть третья сторона треугольника, вписанного в окружность радиуса единица и имеющего две другие стороны ρ и $\rho+d\rho$; отсюда следует, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, $\delta=\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}d\rho$; тем самым формула (13) доказана.

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$v(\xi)=\int\limits_{\Sigma}\frac{f(\xi,\Lambda)}{\rho^m}u(\eta)\,d\sigma, \tag{14}$$

в котором плотность $u(\eta)$ удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем, а характеристика $f(\xi,\Lambda)$ измерима и ограничена. По определению

$$v(\xi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S} dS\int\limits_{\varepsilon}^{2}\frac{f(\xi,\Lambda)}{\rho}\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{\frac{m-2}{2}}u(\eta)\,d\rho =$$

$$=\int\limits_{S} dS\int\limits_{0}^{2}\frac{f(\xi,\Lambda)}{\rho}\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{\frac{m-2}{2}}[u(\eta)-u(\xi)]\,d\rho -$$

$$-u(\xi)\int\limits_{S} f(\xi,\Lambda)\,dS\int\limits_{0}^{2}\frac{1-\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{\frac{m-2}{2}}}{\rho}d\rho +$$

$$+u(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{2}{\varepsilon}\int\limits_{S} f(\xi,\Lambda)\,dS. \tag{15}$$

Отсюда вытекает необходимое и достаточное условие существования интеграла (14):

$$\int_S f(\xi, \Lambda)\, dS = 0. \tag{16}$$

При этом второй интеграл в (15) также исчезает, и мы получаем

$$v(\xi) = \int_\Sigma \frac{f(\xi, \Lambda)}{\rho^m} [u(\eta) - u(\xi)]\, d\sigma. \tag{17}$$

Если вырезать точку ξ не сферой, а произвольной областью ω_ε, уравнение границы которой есть $\rho = \alpha(\varepsilon, \xi, \Lambda)$, и если равномерно по Λ

$$\frac{\alpha(\varepsilon, \xi, \Lambda)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \beta(\xi, \Lambda) > 0,$$

то верна формула, аналогичная формуле (4):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Sigma - \omega_\varepsilon} \frac{f(\xi, \Lambda)}{\rho^m} u(\eta)\, d\sigma_\eta =$$

$$= \int_\Sigma \frac{f(\xi, \Lambda)}{\rho^m} u(\eta)\, d\sigma_\eta - u(\xi) \int_S f(\xi, \Lambda) \ln \beta(\xi, \Lambda)\, dS. \tag{18}$$

7°. Вернемся к интегралу (1). Его характеристика $f(x, \theta)$ есть функция точек x и θ, из которых первая пробегает пространство E_m или некоторую его область, а вторая — единичную сферу. Это равносильно тому (в последующем мы часто так и будем считать), что точка θ пробегает все пространство E_m, кроме начала координат и бесконечно удаленной точки, а характеристика (или любая другая введенная в рассмотрение функция от x и θ) сохраняет постоянное значение, когда точка x фиксирована, а точка θ пробегает луч, проходящий через начало.

§ 6. Условие Липшица

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$v(x)=\int_D K(x, y)\,u(y)\,dy, \quad \text{где} \quad K(x, y)=\frac{f(x, \theta)}{r^m}, \tag{1}$$

D — область пространства E_m, которая может совпадать со всем пространством. Примем, что характеристика непрерывно дифференцируема по декартовым координатам точек x и θ, когда $x \in D$, $\theta \in S$. Тогда, как нетрудно видеть, при $r \to 0$ верна оценка

$$\operatorname{grad}_x K(x, y)=O(r^{-m-1}). \tag{2}$$

При этих условиях справедлива

Теорема 1.6. *Если $u(y)$ удовлетворяет в области D условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$, а на бесконечности $u(y)=O\left(|y|^{-k}\right)$, $k>0$, то сингулярный интеграл* (1) *удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем в любой конечной внутренней подобласти $D' \subset D$.*

Для интеграла (1) нетрудно построить формулу, аналогичную формуле (3) § 5 и отличающуюся только тем, что если шар радиуса единица с центром в x выходит за область D, то единицу можно заменить любой меньшей величиной; мы заменим единицу фиксированной величиной δ, меньшей, чем расстояние между границами областей D' и D. Это даст нам следующую формулу:

$$v(x)=\int_{D \cap (r>\delta)} \frac{f(x, \theta)}{r^m}\,u(y)\,dy+\int_{r<\delta} \frac{f(x, \theta)}{r^m}\,[u(y)-u(x)]\,dy. \tag{3}$$

Первое слагаемое в (3) имеет непрерывные первые производные по координатам точки x, и остается рассмотреть интеграл

$$w(x)=\int_{r<\delta} \frac{f(x, \theta)}{r^m}\,[u(y)-u(x)]\,dy= \\ =\int_{|x-y|<\delta} K(x, y)\,[u(y)-u(x)]\,dy. \tag{4}$$

Пусть $|h| < \frac{\delta}{2}$. Имеем

$$w(x+h)-w(x) = \int\limits_{|x+h-y|<\delta} [u(y)-u(x+h)]\,K(x+h,\ y)\,dy -$$

$$- \int\limits_{|x-y|<\delta} [u(y)-u(x)]\,K(x,\ y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{|x-y|<\delta-|h|} [u(y)-u(x+h)]\,K(x+h,\ y)\,dy -$$

$$- \int\limits_{|x-y|<\delta-|h|} [u(y)-u(x)]\,K(x,\ y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{(|x+h-y|<\delta)\cap(|x-y|>\delta-|h|)} [u(y)-u(x+h)]\,K(x+h,\ y)\,dy -$$

$$- \int\limits_{\delta-|h|<|x-y|<\delta} [u(y)-u(x)]\,K(x,\ y)\,dy. \qquad (5)$$

На рис. 4 область интегрирования третьего интеграла заштрихована.

В двух последних слагаемых подынтегральные функции ограничены, а объем области интегрирования имеет оценку $O(h)$. Каждый из двух первых интегралов (5) в свою очередь разобьем на два: по шару $|x-y| < 2|h|$ и по шаровому слою $2|h| < |x-y| < \delta-|h|$. Имеем

$$|[u(y)-u(x)]\,K(x,\ y)\,| < Cr^{\alpha-m},$$

$$|[u(y)-u(x+h)]\,K(x+h,\ y)| < Cr_1^{\alpha-m},\quad r_1 = |x+h-y|.$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_{r<2|h|} [u(y)-u(x)]\,K(x,\ y)\,dy\right| < C\int\limits_{r<2|h|} r^{\alpha-m}\,dy = C_1|h|^{\alpha},$$

$$\left|\int\limits_{r<2|h|} [u(y)-u(x+h)]\,K(x+h,\ y)\,dy\right| <$$

$$< C\int\limits_{r<2|h|} r_1^{\alpha-m}\,dy < C\int\limits_{r_1<3|h|} r_1^{\alpha-m}\,dy = C_2|h|^{\alpha}.$$

Здесь $C,\ C_1,\ C_2$ — постоянные.

Интегралы по слою $2|h| < |x-y| < \delta - |h|$ преобразуем следующим образом. Имеем

$$[u(y)-u(x+h)]\,K(x+h,\ y)-[u(y)-u(x)]\,K(x,\ y)=$$
$$=[u(y)-u(x+h)]\,[K(x+h,\ y)-K(x,\ y)]-$$
$$-[u(x+h)-u(x)]\,K(x,\ y).$$

При интегрировании по шаровому слою с центром в точке x интеграл от второго слагаемого исчезает в силу

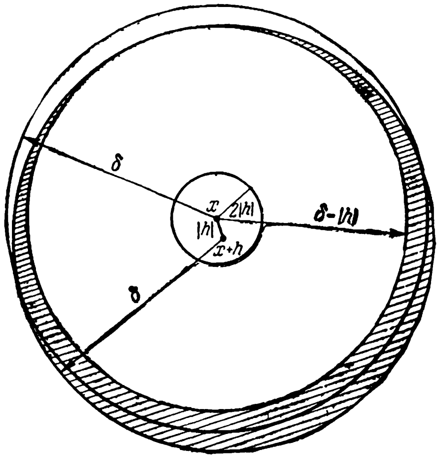

Рис. 4.

условия (2) § 5. Для оценки интеграла от первого слагаемого заметим, что по формуле Тейлора

$$K(x+h,\ y)-K(x,\ y)=(\operatorname{grad}_x K(\xi,\ y),\ h),$$

где ξ — точка отрезка $(x,\ x+h)$ (рис. 5), и в силу оценки (2),

$$|K(x+h,\ y)-K(x,\ y)|\leqslant\frac{C_3 h}{|\xi-y|^{m+1}}.$$

Из чертежа видно, что $|\xi-y|>r-|h|$ и, так как в области интегрирования $r\geqslant 2|h|$, то $|\xi-y|>\frac{r}{2}$. Функция $u(x)$

удовлетворяет условию Липшица, поэтому

$$|[u(y)-u(x+h)][K(x+h,\ y)-K(x,\ y)]| <$$
$$< \frac{C_4|h||x+h-y|^\alpha}{r^{m+1}} \leqslant \frac{C_4|h|(r+|h|)^\alpha}{r^{m+1}}.$$

Так как $\alpha<1$, то $(r+|h|)^\alpha \leqslant r^\alpha+|h|^\alpha$, и окончательно

$$|[u(y)-u(x+h)][K(x+h,\ y)-K(x,\ y)]| <$$
$$< C_4\frac{|h|}{r^{m+1-\alpha}} + C_4\frac{|h|^{\alpha+1}}{r^{m+1}}.$$

Теперь

$$\left|\int\limits_{2|h|<|x-y|<\delta-|h|} [u(y)-u(x+h)][K(x+h,y)-K(x,y)]\,dy\right| <$$
$$< C_5|h|\int\limits_{2|h|}^{\delta-|h|}\frac{dr}{r^{2-\alpha}} + C_6|h|^{\alpha+1}\int\limits_{2|h|}^{\delta-|h|}\frac{dr}{r^2} < C_7|h|^\alpha. \qquad (6)$$

Этим завершается доказательство теоремы 1.6.

Теорема 1.6 легко переносится на интегралы, распространенные по ляпуновским многообразиям. Особо рассмотрим случай замкнутого многообразия Γ. Разобьем Γ на конечное число взаимно перекрывающихся частей $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$; из каждой такой части Γ_j выделим внутреннюю часть Γ'_j таким образом, чтобы $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_k$, взаимно перекрываясь, покрыли все многообразие Γ. Пусть плотность сингулярного интеграла удовлетворяет на Γ условию Липшица с показателем $\alpha<1$, а ядро непрерывно дифференцируемо при $\xi\neq\eta$ и удовлетворяет неравенству

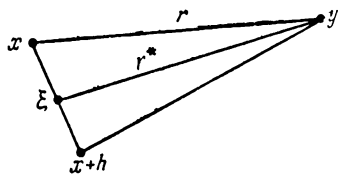

Рис. 5.

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x_j}\right| < \frac{C}{\rho^{m+1}}, \quad C=\text{const}, \qquad (7)$$

где x_j — местные координаты точки ξ в системе с началом в точке η.

По теореме 1.6 сингулярный интеграл удовлетворяет условию Липшица с показателем α на каждой из частей Γ'_j, а следовательно, и на всем многообразии Γ. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 2.6. *Пусть ядро сингулярного интеграла, распространенного по замкнутому ляпуновскому многообразию, непрерывно дифференцируемо при $\xi \neq \eta$ и удовлетворяет неравенству* (7), *а плотность этого интеграла удовлетворяет на* Γ *условию Липшица с показателем* $\alpha < 1$. *Тогда сингулярный интеграл удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем* α *на всем многообразии* Γ.

Теорема 2. 6 была доказана И. И. Приваловым ([1], см. также [2]) для одномерных сингулярных интегралов и Ж. Жиро [1] в общем случае.

§ 7. Порядок сингулярного интеграла на бесконечности

Введем в рассмотрение класс $A_{\alpha,k}$ функций, подчиненных следующим требованиям: если функция $u(x) \in A_{\alpha,k}$, то она определена всюду в E_m и удовлетворяет неравенствам

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{Ar^\alpha}{(x^2+1)^{\frac{k}{2}}}, \quad r \leqslant 1, \quad A=\mathrm{const}, \tag{1}$$

и

$$|u(x)| \leqslant B(x^2+1)^{-\frac{k}{2}}, \quad B=\mathrm{const}, \tag{2}$$

где $0<\alpha<1$ и $0<k\leqslant m$. Через $A'_{\alpha,k}$ обозначим класс функций, определенных всюду в E_m и удовлетворяющих неравенству (1) и, при достаточно большом $|x|$, неравенству

$$|u(x)| \leqslant \frac{B\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{k}{2}}}, \quad B=\mathrm{const}. \tag{3}$$

Теорема 1.7. *Пусть сингулярное ядро* $K(x, y)$ *удовлетворяет условиям* § 6. *Если* $k<m$, *то сингулярный*

интегральный оператор

$$v(x) = \int_{E_m} K(x,\ y)\, u(y)\, dy = \int_{E_m} \frac{f(x,\ \theta)}{r^m}\, u(y)\, dy \qquad (4)$$

переводит функцию $u \in A_{\alpha, k}$ *в функцию* $v \in A'_{\alpha, k}$.

То, что функция $v(x)$ удовлетворяет условию (1), легко доказать, повторяя рассуждения § 6; достаточно в этих рассуждениях заменить постоянную Липшица величиной $A(x^2+1)^{-\frac{k}{2}}$; это допустимо, потому что в оценках § 6 точка x предполагается фиксированной.

Остается доказать, что $v(x)$ удовлетворяет неравенству (3) при больших значениях $|x|$. Заметим прежде всего, что из условий § 6 вытекает ограниченность характеристики $f(x,\ \theta)$. Далее, в соответствии с формулой (3) § 5 имеем

$$v(x) = \int_{r>1} K(x,\ y)\, u(y)\, dy + \\ + \int_{r<1} K(x,\ y)\, [u(y) - u(x)]\, dy = v_1(x) + v_2(x). \qquad (5)$$

По неравенству (1)

$$|v_2(x)| \leqslant \frac{A'}{(x^2+1)^{\frac{k}{2}}} \int_{r<1} \frac{dy}{r^{m-\alpha}} = \frac{A''}{(x^2+1)^{\frac{k}{2}}},\quad A',\ A'' = \text{const}, \qquad (6)$$

так что на бесконечности $v_2(x)$ удовлетворяет неравенству (2), более сильному, чем (3).

Оценим $v_1(x)$. По неравенству (2)

$$|v_1(x)| \leqslant B' \int_{r>1} \frac{dy}{r^m (y^2+1)^{\frac{k}{2}}}, \qquad B' = \text{const}.$$

Введя сферические координаты с центром в x, получим

$$|v_1(x)| \leqslant B' \int_{r>1} \frac{dr\, dS}{r(y^2+1)^{\frac{k}{2}}} = \\ = B' \int_S dS \int_1^\infty \frac{dr}{r(r^2 + x^2 + 1 - 2r\,|x| \cos\gamma)^{\frac{k}{2}}},$$

где γ — угол между векторами x и $y - x$. Ось x_1 направим по вектору x. Тогда $dS = \sin^{m-2}\gamma\, d\gamma\, dS'$, где S' — единичная сфера в пространстве $m-1$ измерений; угол γ меняется в пределах $0 \leqslant \gamma \leqslant \pi$, если $m > 2$, и в пределах $-\pi \leqslant \gamma \leqslant \pi$, если $m = 2$. Полагая пока $m > 2$, имеем

$$|v_1(x)| \leqslant B' \int_1^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(r^2 + x^2 + 1 - 2r\,|x| \cos\gamma)^{\frac{k}{2}}},$$

или, если ввести обозначение $\sigma = \dfrac{2r\,|x|}{r^2 + x^2 + 1}$, так что $0 \leqslant \sigma < 1$,

$$|v_1(x)| \leqslant B' \int_1^\infty \frac{dr}{r\,(r^2 + x^2 + 1)^{\frac{k}{2}}} \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(1 - \sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}}. \tag{7}$$

Внутренний интеграл разобьем на два по промежуткам $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Второй интеграл ограничен при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$; обозначив его верхнюю границу через C, найдем, что соответствующее слагаемое в оценке $|v_1(x)|$ не превосходит произведения постоянной $B'C$ на интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\,(r^2 + x^2 + 1)^{\frac{k}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{k}{2}}} \int_{(x^2+1)^{-1/2}}^\infty \frac{dt}{t\,(t^2+1)^{\frac{k}{2}}} < C' \frac{\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{k}{2}}}, \quad C' = \text{const}. \tag{8}$$

Неравенство (8) верно для достаточно больших x.

Первый внутренний интеграл в (7) равен

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(1 - \sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}}. \tag{9}$$

Если $k < m-1$, то интеграл (9) ограничен при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Действительно, в этом случае

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(1-\sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(1-\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}} < 2^{\frac{k}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-k-2}\gamma\, d\gamma;$$

последний интеграл сходится, так как показатель $m-k-2 > -1$. Коль скоро интеграл (9) ограничен, то из оценки (8) вытекает, что $v_1(x)$ удовлетворяет неравенству вида (3), и теорема доказана.

Теперь рассмотрим интеграл (9) в случае, когда $m-1 \leqslant k < m$.

Полагая $\cos\gamma = t$, имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(1-\sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}} =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\, dt}{(1-\sigma t)^{\frac{k}{2}}} < 2^{\frac{m-3}{2}} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-\sigma t}\right)^{\frac{m-3}{2}} \frac{dt}{(1-\sigma t)^{\varepsilon+1}},$$

где $\varepsilon = \frac{k-m+1}{2}$; очевидно, $0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$. Далее, $1-t < 1-\sigma t$, поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(1-\sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}} < 2^{\frac{m-3}{2}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-\sigma t)^{\varepsilon+1}} =$$

$$= \begin{cases} 2^{\frac{m-3}{2}} \dfrac{1}{\varepsilon\sigma}\left[\dfrac{1}{(1-\sigma)^{\varepsilon}} - 1\right], & \varepsilon > 0, \\ 2^{\frac{m-3}{2}} \dfrac{1}{\sigma} \ln(1-\sigma), & \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть сначала $\varepsilon > 0$. Вблизи значения $\sigma = 0$ правая часть в (10) ограничена, поэтому можно написать

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(1-\sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}} < \frac{C}{(1-\sigma)^{\varepsilon}}, \quad C = \text{const}. \tag{11}$$

Далее,

$$1 - \sigma = \frac{1 + (r - |x|)^2}{1 + r^2 + x^2};$$

подставив это в (11), найдем, что соответствующее слагаемое в неравенстве (7) имеет оценку

$$B'' \int_1^{\infty} \frac{dr}{r(x^2+1+r^2)^{\frac{k-2\varepsilon}{2}}[1+(r-|x|)^2]^{\varepsilon}}, \quad B'' = \text{const}. \tag{12}$$

Последний интеграл оценим по неравенству Гельдера с произвольным пока показателем p.

$$\int_1^{\infty} \frac{dr}{r(r^2+1+x^2)^{\frac{k-2\varepsilon}{2}}[1+(r-|x|)^2]^{\varepsilon}} \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\int_1^{\infty} \frac{dr}{r(r^2+1+x^2)^{\frac{p'(k-2\varepsilon)}{2}}}\right\}^{\frac{1}{p'}} \times$$
$$\times \left\{\int_1^{\infty} \frac{dr}{r[1+(r-|x|)^2]^{p\varepsilon}}\right\}^{\frac{1}{p}} = J_1^{\frac{1}{p'}} J_2^{\frac{1}{p}}. \tag{13}$$

Интеграл J_1 оценивается по неравенству (8), что дает нам

$$J_1^{\frac{1}{p'}} \leqslant C''(x^2+1)^{-\frac{k-2\varepsilon}{2}}[\ln(x^2+1)]^{\frac{1}{p'}}. \tag{14}$$

Имеем, далее,

$$J_2=\int\limits_1^{|x|}\frac{dr}{r\,[1+(|x|-r)^2]^{p\varepsilon}}+\int\limits_{|x|}^{\infty}\frac{dr}{r\,[1+(r-|x|)^2]^{p\varepsilon}}=J_2'+J_2''. \qquad (15)$$

Выберем p столь близким к единице, чтобы было $2p\varepsilon<1$. Подстановка $r=|x|(1+t)$ дает

$$J_2''=\int\limits_0^1\frac{dt}{(1+t)(1+x^2t^2)^{p\varepsilon}}+\int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{(1+t)(1+x^2t^2)^{p\varepsilon}}<$$

$$<\int\limits_0^1\frac{dt}{(x^2t^2)^{p\varepsilon}}+\int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{t^{1+2p\varepsilon}\,|x|^{2p\varepsilon}}=$$

$$=O\left(|x|^{-2p\varepsilon}\right)=O\left((x^2+1)^{-p\varepsilon}\right). \qquad (16)$$

В интеграле J_2' выполним подстановку $r=(1-t)|x|$:

$$J_2'=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t)(1+x^2t^2)^{p\varepsilon}}+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{|x|}}\frac{dt}{(1-t)(1+x^2t^2)^{p\varepsilon}}.$$

Оценим первый интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t)(1+x^2t^2)^{p\varepsilon}}<2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1+x^2t^2)^{p\varepsilon}}=$$

$$=\frac{2}{|x|}\left[\int\limits_0^1\frac{dy}{(1+y^2)^{p\varepsilon}}+\int\limits_1^{\frac{|x|}{2}}\frac{dy}{(1+y^2)^{p\varepsilon}}\right]<$$

$$<\frac{2}{|x|}\left(1+\int\limits_1^{\frac{|x|}{2}}y^{-2p\varepsilon}\,dy\right)=O\left(|x|^{-2p\varepsilon}\right)=O\left((x^2+1)^{-p\varepsilon}\right). \qquad (17)$$

Несколько проще оценивается второй интеграл:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{|x|}} \frac{dt}{(1-t)(1+x^2t^2)^{p\varepsilon}} <$$

$$< \left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-p\varepsilon} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{|x|}} \frac{dt}{1-t} = O\left(\frac{\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^{p\varepsilon}}\right). \quad (18)$$

Из формул (15)—(18) вытекает, что

$$J_2 = O\left[(x^2+1)^{-p\varepsilon}\ln(x^2+1)\right];$$

теперь формулы (12)—(14) приводят к оценке

$$v_1(x) = O\left[(x^2+1)^{-\frac{k}{2}}\ln(x^2+1)\right],$$

которая доказывает теорему для случая $m > 2$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Остается еще рассмотреть случай $k = m-1$, или $\varepsilon = 0$. При любом $\eta > 0$ и $0 \leqslant \sigma < 1$

$$\sigma^{-1}\ln(1-\sigma) < C_\eta(1-\sigma)^\eta,$$

где C_η зависит только от η; дальнейшие рассуждения протекают, как в общем случае.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось рассмотреть случай $m = 2$. В этом случае вместо (7) получается неравенство

$$|v_1(x)| < B' \int\limits_0^\infty \frac{dr}{r(1+x^2+r^2)^{\frac{k}{2}}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\gamma}{(1-\sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}} =$$

$$= 2B' \int\limits_1^\infty \frac{dr}{r(r^2+1+x^2)^{\frac{k}{2}}} \int\limits_0^{\pi} \frac{d\gamma}{(1-\sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}},$$

и дело сводится к оценке интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{(1-\sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}}.$$

Если $k<1$, то этот интеграл ограничен, и теорема доказана. Пусть $1<k<2$. Тогда, полагая $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=t$, $(1-\sigma)(1+\sigma)^{-1}=a^2$, легко найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{(1-\sigma\cos\gamma)^{\frac{k}{2}}} < C\int_0^1 \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k}{2}}} = \frac{C}{a^{k-1}}\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{k}{2}}} <$$

$$< \frac{C}{a^{k-1}}\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{k}{2}}} < \frac{C'}{(1-\sigma)^{\frac{k-1}{2}}} = \frac{C'}{(1-\sigma)^{\varepsilon}}, \quad C,\ C'=\text{const};$$

дальнейшее протекает, как в общем случае. Точно так же можно исследовать случай $k=1$, которому соответствует $\varepsilon=0$.

Замечание. Было бы интересно доказать, что на самом деле оператор (4) сохраняет класс $A_{\alpha,k}$, т. е. что в оценке значения этого оператора отсутствует множитель $\ln(1+x^2)$.

Следствие 1.7. Если $u(x)\in A_{\alpha,k}$, то $v(x)\in A_{\alpha,k'}$ при любом $k'<k$.

Следствие 2.7. Если $u(x)\in A_{\alpha,k}$ и сингулярные ядра $K_n(x-y)$, $n=1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям § 6, то функции $v_n(x)$, определяемые соотношениями

$$v_0(x)=u(x), \qquad v_n(x)=\int_{E_m} K_n(x-y)\,v_{n-1}(y)\,dy,$$

принадлежат классу $A_{\alpha,k'}$ при любом $k'<k$.

Рассмотрим случай, когда стереографическое преобразование переводит произведение $(x^2+1)^{\frac{m}{2}}(y^2+1)^{\frac{m}{2}}K(x,\ x-y)$

в некоторое ядро $\tilde{K}(\xi, \eta)$, которое на римановой сфере Σ удовлетворяет условиям теоремы 2.6. Обозначим через A_α класс функций $u(x)$, обладающих тем свойством, что на сфере Σ произведение $(x^2+1)^{\frac{m}{2}} u(x)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha < 1$. Докажем, что, при сделанном только что предположении относительно ядра $K(x, x-y)$, сингулярный интеграл

$$v(x) = \int\limits_{E_m} K(x, x-y)\, u(y)\, dy \tag{19}$$

переводит любую функцию класса A_α в функцию того же класса [1]).

Имеем

$$v(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{r<\varepsilon} K(x, x-y)\, u(y)\, dy. \tag{20}$$

В последнем интеграле выполним стереографическое преобразование. Сфера $r=\varepsilon$ перейдет при этом в m-мерную же сферу σ_ε, расположенную на сфере Σ и определяемую уравнением

$$\rho = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}};$$

при $\varepsilon \to 0$ отношение $\frac{\rho}{\varepsilon}$ имеет предел $\beta = 2(x^2+1)^{-1}$. Обозначим

$$(x^2+1)^{\frac{m}{2}} u(x) = \tilde{u}(\xi), \quad (x^2+1)^{\frac{m}{2}} v(x) = \tilde{v}(\eta),$$

тогда формула (19) переходит в следующую:

$$\tilde{v}(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Sigma-\omega_\varepsilon} \tilde{K}(\xi, \eta)\, \tilde{u}(\eta)\, d\sigma, \tag{21}$$

где ω_ε — часть сферы Σ, ограниченная поверхностью σ_ε. К интегралу (20) можно применить формулу (16) § 5. При этом в нашем случае второй интеграл справа пропадает, так

[1]) См. статью автора [11].

как β не зависит от Λ, и мы получаем

$$\tilde{v}(\xi) = \int\limits_{\Sigma} \tilde{K}(\xi, \eta)\,\tilde{u}(\eta)\,d\sigma.$$

Функция $\tilde{u}(\xi)$ удовлетворяет на Σ условию Липшица с показателем α; по теореме 2.6 тому же условию удовлетворяет и $\tilde{v}(\xi)$, а это и означает, что $v(x) \in A_\alpha$.

§ 8. Дифференцирование интегралов со слабой особенностью

Пусть D — область пространства E_m, которая может совпадать со всем пространством, и пусть

$$w(x) = \int\limits_{D} u(y)\,\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\,dy, \quad x \in D. \tag{1}$$

Допустим, что функция $\varphi(x, \theta)$ непрерывна и ограничена вместе со своими первыми производными по декартовым координатам точек x и θ, когда x пробегает область D, а θ — единичную сферу S. Допустим еще, что $u(y)$ удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем и что на бесконечности (если область D бесконечная) $u(x) = O(|x|^{-l})$, $l > 1$. Докажем, что при этих условиях существуют первые производные интеграла (1), и эти производные определяются формулой

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{D} u(y)\,\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\,dy = \int\limits_{D} u(y)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right]dy - u(x)\int\limits_{S}\varphi(x, \theta)\cos(r, x_k)\,dS, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

где x_k — декартовы координаты точки x.

Вырежем точку x шаром $r < \varepsilon$ и пусть $D_\varepsilon = D - (r < \varepsilon)$. Составим производную

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{D_\varepsilon} u(y)\,\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\,dy = \int\limits_{D_\varepsilon} u(y)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right]dy - \int\limits_{r=\varepsilon} u(y)\,\frac{\varphi(x, \theta)}{\varepsilon^{m-1}}\cos(r, x_k)\,dS_\varepsilon. \tag{3}$$

Здесь $dS_\varepsilon = \varepsilon^{m-1}\,dS$ есть элемент поверхности сферы $r=\varepsilon$, а направление r взято от x к y.

Введем следующие обозначения: через D'_k обозначим производную по x_k, вычисленную в предположении, что r и θ не зависят от x_k, а через D''_k — производную по x_k, вычисленную в предположении, что только r и θ зависят от x_k. В этих обозначениях формула (3) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{D_\varepsilon} u(y)\frac{\varphi(x,\ \theta)}{r^{m-1}}\,dy = \int\limits_{D_\varepsilon} D''_k\left[\frac{\varphi(x,\ \theta)}{r^{m-1}}\right]u(y)\,dy + \\ + \int\limits_{D_\varepsilon} D'_k\,[\varphi(x,\ \theta)]\,\frac{1}{r^{m-1}}\,u(y)\,dy - \\ - \int\limits_{S} u(x+\varepsilon\theta)\,\varphi(x,\ \theta)\cos(r,\ x_k)\,dS. \qquad (4)$$

Сумма второго и третьего интегралов справа равномерно стремится при $\varepsilon\to 0$ к пределу, равному

$$\int\limits_{D} D'_k\,[\varphi(x,\ \theta)]\,\frac{1}{r^{m-1}}\,u(y)\,dy - u(x)\int\limits_{S}\varphi(x,\ \theta)\cos(r,\ x_k)\,dS.$$

Остается исследовать первый интеграл. Его ядро, очевидно, можно представить в виде

$$D''_k\left[\frac{\varphi(x,\ \theta)}{r^{m-1}}\right] = \frac{f(x,\ \theta)}{r^m}.$$

Докажем, что $f(x,\ \theta)$ удовлетворяет условию (2) § 5:

$$\int\limits_{S} f(x,\ \theta)\,dS = 0.$$

Нумерацию осей координат временно выберем так, чтобы $k=1$, и введем сферические координаты

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + r\cos\vartheta_1,\\ y_2 &= x_2 + r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{m-1} &= x_{m-1} + r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1},\\ y_m &= x_m + r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Тогда

$$dS = \sin^{m-2}\vartheta_1 \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{m-2}\, d\vartheta_{m-1}. \tag{6}$$

Заметим, что $-\pi \leqslant \vartheta_{m-1} \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \vartheta_k \leqslant \pi$, $k \leqslant m-2$. От переменной $x_k = x_1$ зависят только r и ϑ_1, поэтому

$$D_1''\left[\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{m-1}}\right] = \frac{1}{r^m}\left[r\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_1} - (m-1)\varphi\frac{\partial r}{\partial x_1}\right].$$

Далее,

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1 - y_1}{r} = -\cos\vartheta_1;$$

дифференцируя еще раз, получим $\dfrac{\partial\vartheta_1}{\partial x_1} = \dfrac{\sin\vartheta_1}{r}$. Теперь

$$D_1''\left[\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{m-1}}\right] = \frac{1}{r^m}\left[(m-1)\varphi\cos\vartheta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\sin\vartheta_1\right]$$

и, следовательно,

$$f(x,\theta) = (m-1)\varphi\cos\vartheta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\sin\vartheta_1.$$

Составим теперь интеграл

$$\int\limits_S f(x,\theta)\,dS = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\vartheta_{m-1}\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-2}\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{m-3}\vartheta_2\,d\vartheta_2 \times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\left[(m-1)\varphi\cos\vartheta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}\cos\vartheta_1\right]\sin^{m-2}\vartheta_1\,d\vartheta_1.$$

Внутренний интеграл равен

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\left[\sin^{m-1}\vartheta_1\,\varphi(x,\theta)\right]d\vartheta_1 = 0,$$

и условие (2) § 5 выполнено. По доказанному в § 5 первый интеграл справа в (4) стремится при $\varepsilon \to 0$ к сингулярному интегралу

$$\int\limits_D D_k''\left[\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{m-1}}\right]u(y)\,dy$$

равномерно относительно x. Но тогда производная

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{D_\varepsilon} u(y) \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}} dy$$

равномерно стремится к некоторому пределу, интеграл (1) имеет производную, равную этому пределу, и формула (2) доказана. Ниже (см. § 29) мы распространим ее на значительно более широкие классы функций.

Доказательство (не вполне достаточное) формулы (2) было дано Ф. Трикоми [2] для случая, когда $m=2$, а φ не зависит от x. Общий случай рассмотрен автором [11, 16].

ГЛАВА III

КОМПОЗИЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 9. Композиция сингулярных и обыкновенных интегралов

Будем называть *обыкновенным* интеграл

$$\int_{E_m} L(x, y) u(y) dy,$$

ядро которого имеет вид

$$L(x, y) = r^{-\lambda} F(x, y), \qquad 0 < \lambda < m, \tag{1}$$

причем функция $F(x, y)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x, y') - F(x, y'')| < C|y' - y''|^{\beta}, \quad |y' - y''| \leqslant 1, \ \beta > 0, \tag{2}$$

в котором постоянные C и β не зависят от y', y''. Обыкновенными будем называть и ядра, удовлетворяющие перечисленным условиям.

Пусть теперь $u(y) \in A_{\alpha, k}$, где $k > m - \lambda$, $\alpha \geqslant \beta$, и

$$v(x) = \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy, \quad w(x) = \int_{E_m} L(x, y) v(y) dy,$$

где $f(x, \theta)$ удовлетворяет условиям § 5 и, кроме того, неравенству

$$|f(x', \theta) - f(x'', \theta)| \leqslant C_1 |x' - x''|^{\alpha}, \quad C_1 = \text{const}.$$

Исключая $v(x)$, получаем

$$\left.\begin{gathered} w(x)=\int\limits_{E_m}\frac{F(x,\ y)}{r^{\lambda}}\,dy\int\limits_{E_m}\frac{f(y,\ \theta)}{r_1^m}\ u(z)\,dz,\\ r_1=|z-y|,\qquad \theta_1=\frac{z-y}{r_1}. \end{gathered}\right\}\tag{3}$$

Докажем, что в интеграле (3) можно изменить порядок интегрирования и что $w(x)$ выражается через $u(x)$ в виде интеграла, ядро которого имеет, при $x\to y$, оценку $O(r^{-\lambda})$. [1])

По определению,

$$w(x)=\int\limits_{E_m}\frac{F(x,\ y)}{r^{\lambda}}\,dy\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{r_1>\varepsilon}\frac{f(y,\ \theta_1)}{r_1^m}\,u(z)\,dz.$$

Внутренний интеграл равномерно стремится к своему пределу, поэтому

$$\begin{aligned} w(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{E_m}\frac{F(x,\ y)}{r^{\lambda}}\,dy\int\limits_{r_1>\varepsilon}\frac{f(y,\ \theta_1)}{r_1^m}\,u(z)\,dz=&\\ =\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{E_m}u(z)\,dz\int\limits_{r_1>\varepsilon}\frac{F(x,\ y)\,f(x,\ \theta)}{r^{\lambda}r_1^m}\,dy.& \end{aligned}\tag{4}$$

Исследуем сингулярный интеграл

$$\begin{aligned} M(x,\ z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{r_1>\varepsilon}\frac{F(x,\ y)\,f(y,\ \theta_1)}{r^{\lambda}r_1^m}\,dy=&\\ =\int\limits_{E_m}\frac{F(x,\ y)\,f(y,\ \theta_1)-F(x,\ z)\,f(z,\ \theta_1)}{r^{\lambda}r_1^m}\,dy+&\\ +F(x,\ z)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S}f(z,\ \theta_1)\,dS_1\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dr_1}{r_1r^{\lambda}}.& \end{aligned}\tag{5}$$

---

[1]) Это утверждение доказал Ж. Жиро [1], который рассматривал интегралы, распространенные по достаточно гладким замкнутым поверхностям.

Повторяя рассуждения, обычно используемые при доказательстве теоремы о композиции ядер со слабой особенностью, найдем, что первый интеграл в (5) имеет при $x \to z$ оценку $O\left(r_2^{\beta-\lambda}\right) = O\left(r_2^{-\lambda}\right)$, где $r_2 = |x - z|$. Во втором интеграле сделаем замену $r_1 = r_2 t$ и обозначим через γ угол между векторами $x - z$ и $y - z$. Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dr_1}{r_1 r^{\lambda}} = \frac{1}{r_2^{\lambda}} \int\limits_{\frac{\varepsilon}{r_2}}^{\infty} \frac{dt}{t\left(1 - 2t\cos\gamma + t^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{r_2^{\lambda}} \left[\int\limits_{\frac{\varepsilon}{r_2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t\left(1 - 2t\cos\gamma + t^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dt}{t\left(1 - 2t\cos\gamma + t^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}} \right]. \tag{6}$$

Первый интеграл в (6) справа очевидно имеет значение

$$\ln \frac{r_2}{\varepsilon} + B(r_2, \gamma) + O(\varepsilon),$$

где $B(r_2, \gamma)$ ограниченная функция, а $O(\varepsilon)$ означает функцию, которая при $r_2 \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю равномерно относительно γ. Используя формулу (4) § 5, убедимся, что упомянутый интеграл дает в $M(x, z)$ слагаемое порядка $O\left(r_2^{-\lambda}\right)$.

Рассмотрим второй интеграл справа в формуле (6). Если $\lambda < 1$, то этот интеграл ограничен, если $\lambda = 1$, то он имеет оценку $O\left(\ln\left|\sin^{-1}\frac{\gamma}{2}\right|\right)$; в обоих случаях, следовательно, $M(x, z) = O\left(r_2^{-\lambda}\right)$. Остается разобрать случай $\lambda > 1$. Заменив в знаменателе подынтегральной функции множитель t его наименьшим значением $1/2$ и выполнив подстановку $t = \cos\gamma + \tau\sin\gamma$, получим

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dt}{t\left(1 - 2t\cos\gamma + t^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}} < \frac{k}{\sin^{\lambda-1}\gamma}, \quad k = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\left(1 + \tau^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

Таким образом, второй интеграл (6) дает в $M(x, z)$ слагаемое, которое не превосходит величины

$$\frac{k}{r_2^\lambda} F(x, z) \int_S \frac{f(z, \theta_1)}{\sin^{\lambda-1}\gamma} dS_1. \tag{7}$$

Координатную систему выберем так, чтобы начало координат совпало с точкой z, а первая координатная ось была направлена по вектору $x - z$. Обозначая через $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ $\ldots, \vartheta_{m-1}$ угловые координаты точки θ_1, имеем в данном случае $\vartheta_1 = \gamma$; общая формула

$$dS_1 = \sin^{m-2}\vartheta_1 \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{m-1}$$

принимает вид

$$dS_1 = \sin^{m-2}\gamma \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}\, d\gamma\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{m-1}.$$

Теперь ясно, что интеграл (7) сходится и представляет собой ограниченную функцию от z, а величина (7) имеет порядок $O\left(r_2^{-\lambda}\right)$. Окончательно, при любом λ, $0 < \lambda < m$, верна оценка $M(x, z) = O\left(r_2^{-\lambda}\right)$. Теперь нетрудно доказать, что в интеграле (4) можно выполнить предельный переход под знаком интеграла, что приводит к формуле

$$w(x, z) = \int_{E_m} M(x, z)\, u(z)\, dz.$$

Аналогичный результат получается, когда композиция совершается в обратном порядке, так что

$$v(x) = \int_{E_m} L(x, y)\, u(y)\, dy,$$

$$w(x) = \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} v(y)\, dy.$$

В последующих параграфах настоящей главы изучается композиция двух сингулярных интегралов. Исследование проводится при очень сильных ограничениях: предполагается, что обе характеристики не зависят от полюса и разлагаются в достаточно быстро сходящиеся ряды по сферическим функциям. При этом мы не указываем, какова должна быть быстрота сходимости, так что, строго говоря, получаемые ниже в этой главе формулы композиции следует считать вполне обоснованными пока только в том случае, когда обе характеристики суть сферические полиномы, не зависящие от полюса. Распространение формул композиции на общий случай будет дано в § 24 и 33.

§ 10. Композиция двойных сингулярных интегралов[1])

Положим

$$A_n u = \int_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{r^2} u(y)\, dy, \qquad Bu = \int_{E_2} \frac{\cos\theta}{r^2} u(y)\, dy. \tag{1}$$

По формуле дифференцирования (2) § 8 имеем

$$Bu = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{E_2} u(y) \frac{dy}{r};$$

мы считаем пока, что $u \in A_{\alpha,k}$, $k > 1$. Теперь

$$BA_n u = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{E_2} \frac{dy}{r} \int_{E_2} \frac{e^{in\theta_1}}{r_1^2} u(z)\, dz;$$

здесь использованы обозначения рис. 6. В силу результатов § 9, порядок интегрирования можно изменить:

$$BA_n u = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{E_2} u(z)\, dz \int_{E_2} \frac{e^{in\theta_1}}{rr_1^2}\, dy. \tag{2}$$

Далее,

$$\int_{E_2} \frac{e^{in\theta_1}}{rr_1^2}\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r_1 > \varepsilon} \frac{e^{in\theta_1}}{rr_1^2}\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta_1}\, d\theta_1 \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dr_1}{rr_1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta_1}}{r_2} \Big\{ \ln \frac{r_2}{\varepsilon} +$$

$$+ \ln \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon \cos(\theta_1 - \theta_2)}{r_2} + \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{r_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{\varepsilon^2}{r_2^2}} \right] -$$

$$- 2 \ln \left| \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right| \Big\}\, d\theta_1.$$

---

[1]) См. статьи автора [1, 2].

Подставив это в (2), получим

$$BA_n u = -2\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{E_2}\frac{u(z)}{r_2}\,dz\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta_1}\ln\left|\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|d\theta_1. \qquad (3)$$

Имеет место формула[1])

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\ln\left|\sin\frac{\theta-\omega}{2}\right|d\theta = -\frac{\pi e^{in\omega}}{|n|}, \qquad n\neq 0,$$

из которой следует

$$BA_n u = \frac{2\pi}{|n|}\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{E_2}\frac{e^{in\theta}}{r_2}u(z)\,dz = \frac{2\pi}{|n|}\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{E_2}\frac{e^{in\theta}}{r}u(y)\,dy.$$

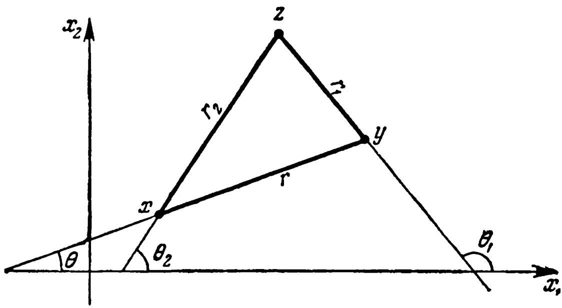

Рис. 6.

Применяя опять формулу дифференцирования, получим

$$BA_n u = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{|n|}\displaystyle\int\limits_{E_2}(\cos\theta + in\sin\theta)\frac{e^{in\theta}}{r^2}u(y)\,dy, & n\neq\pm 1, \quad (4)\\[2ex] 2\pi\displaystyle\int\limits_{E_2}\frac{e^{2i\theta}}{r^2}u(y)\,dy - 2\pi^2 u(x), & n = 1, \quad (5)\\[2ex] 2\pi\displaystyle\int\limits_{E_2}\frac{e^{-2i\theta}}{r^2}u(y)\,dy - 2\pi^2 u(x), & n = -1, \quad (6)\end{cases}$$

[1]) См., например, статью автора [11], формулы (7) § 1 и (1) § 2.

Если положить

$$Cu = i \int_{E_2} \frac{\sin\theta}{r^2}\, u(y)\, dy,$$

то тем же путем можно найти

$$CA_n u = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{|n|} \displaystyle\int_{E_2} (n\cos\theta + i\sin\theta) \frac{e^{in\theta}}{r^2}\, u(y)\, dy, & n \neq \pm 1, \quad (4a) \\ 2\pi \displaystyle\int_{E_2} \frac{e^{2i\theta}}{r^2}\, u(y)\, dy + 2\pi^2 u(x), & n = 1, \quad (5a) \\ -2\pi \displaystyle\int_{E_2} \frac{e^{-2i\theta}}{r^2}\, u(y)\, dy - 2\pi^2 u(x), & n = -1. \quad (6a) \end{cases}$$

Введем обозначение

$$hu = \frac{1}{2\pi i} A_1 u = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_2} \frac{e^{i\theta}}{r^2}\, u(y)\, dy. \tag{7}$$

Вычитая равенства (5) и (5a), найдем $\frac{1}{2\pi i} A_{-1} hu = u(x)$; точно так же, складывая равенства (6) и (6a), получим $\frac{1}{2\pi i} hA_{-1} u = u(x)$. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} A_{-1} = h^{-1}.$$

Сложив формулы (5) и (5a), получим еще $A_2 = -\pi h^2$. Наконец, сложение формул (4) и (4a) дает

$$A_1 A_n = \pm \frac{2\pi(n+1)}{n} A_{n+1};$$

знак плюс соответствует $n > 0$, знак минус — $n < 0$. Полагая в последней формуле $n = 2, 3, \ldots$, мы придем к общей формуле

$$A_n = \frac{2\pi i^n h^n}{n}, \qquad n > 0.$$

Аналогично

$$A_{-n} = \frac{2\pi i^n h^{-n}}{n}, \qquad n > 0.$$

Обе формулы можно объединить в одну

$$\int\limits_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{r^2} u(y)\,dy = \frac{2\pi i^{|n|}}{|n|} h^n u. \tag{8}$$

§ 11. Понятие о сингулярном операторе

Оператор вида

$$a_0(x)\,u(x) + \int\limits_{E_m} \frac{f(x,\,\theta)}{r^m} u(y)\,dy + Tu \tag{1}$$

будем называть сингулярным, если:

1) коэффициент $a_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|a_0(y) - a_0(x)| \leqslant Ar^{\lambda}\,[(1+x^2)(1+y^2)]^{-\frac{\lambda}{2}}; \tag{2}$$

2) характеристика $f(x,\,\theta)$ удовлетворяет условиям § 5 и неравенству

$$|f(y,\,\theta) - f(x,\,\theta)| \leqslant Br^{\mu}\,[(1+x^2)(1+y^2)]^{-\frac{\mu}{2}}; \tag{3}$$

3) оператор T вполне непрерывен в $L_p(E_m)$ при некотором значении p, $1 < p < \infty$. В неравенствах (2) и (3) A, B, λ, μ означают положительные постоянные.

Сингулярный оператор вида

$$a_0(x)\,u(x) + \int\limits_{E_m} \frac{f(x,\,\theta)}{r^m} u(y)\,dy \tag{4}$$

мы иногда будем называть *простейшим*. Ниже понятие сингулярного оператора будет расширено.

§ 12. Композиция двойных сингулярных интегралов. Символ

Рассмотрим сингулярный оператор

$$Au = a_0(x)\,u(x) + \int\limits_{E_2} \frac{f(x,\,\theta)}{r^2} u(y)\,dy + Tu. \tag{1}$$

Его характеристику разложим в ряд Фурье:

$$f(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' b_n(x) e^{in\theta}.$$

Штрих у знака суммы означает пропуск свободного члена, отсутствие которого необходимо в силу формулы (2) § 5. Пользуясь формулой (8) § 10, можно представить сингулярный интеграл (1) в следующем виде:

$$\int_{E_2} \frac{f(x, \theta)}{r^2} u(y) dy = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' a_n(x) h^n u,$$

где

$$a_n(x) = \frac{2\pi i^{|n|}}{|n|} b_n(x). \tag{2}$$

Теперь

$$Au = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x) h^n u + Tu. \tag{3}$$

Таким образом, *двумерный сингулярный оператор может быть представлен, с точностью до слагаемого, вполне непрерывного в некотором пространстве $L_p(E_m)$, в виде ряда по степеням оператора h.*

Сделаем теперь важное для дальнейшего замечание: если функция $q(x)$ удовлетворяет неравенству (2) § 11 (разумеется, пока при $m=2$), то, как это следует из леммы 2.4, оператор $h^n(qu) - q(x) h^n u$ вполне непрерывен в соответствующем пространстве $L_p(E_m)$. Таким образом, множитель $q(x)$ можно вынести за знак оператора h^n, добавив при этом некоторое вполне непрерывное слагаемое.

Пусть даны два простейших сингулярных оператора. Их можно представить в виде

$$A_j u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(j)}(x) h^n u, \qquad j = 1, 2.$$

Из сказанного выше вытекает общая формула композиции, верная во всяком случае, если коэффициенты $a_n^{(j)}(x)$ удовлетворяют условиям § 11 и достаточно быстро убывают при $n \to \infty$:

$$A_1A_2u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h^k u \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{k-n}^{(1)}(x)\, a_n^{(2)}(x) + \int_{E_2} M_1(x, y)\, u(y)\, dy, \quad (4)$$

$$A_2A_1u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h^k u \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{k-n}^{(1)}(x)\, a_n^{(2)}(x) + \int_{E_2} M_2(x, y)\, u(y)\, dy, \quad (5)$$

где интегралы с ядрами $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y)$ вполне непрерывны в соответствующем $L_p(E_m)$. Из формул (4) и (5) следует, что *умножение сингулярных операторов коммутативно с точностью до вполне непрерывного слагаемого. Это умножение строго коммутативно, если операторы простейшие, а коэффициенты $a_n^{(j)}$ постоянные.*

Вернемся к оператору (1). Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x)\, e^{in\theta}, \qquad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi; \quad (6)$$

коэффициенты $a_n(x)$ определены формулой (2). Эту функцию назовем *символом* оператора (1). Всякому вполне непрерывному в рассматриваемом пространстве $L_p(E_m)$ оператору припишем символ, равный нулю. Очевидно, по данному символу сингулярный оператор восстанавливается с точностью до вполне непрерывного слагаемого. Из результатов настоящего параграфа вытекает

Теорема 1.12. *Сумме и произведению простейших сингулярных операторов соответствует сумма и произведение их символов.*

§ 13. Композиция многомерных сингулярных интегралов

Формулы композиции для общего случая пространства m измерений были даны Ж. Жиро [3]. Обобщая изложенный в предшествующих параграфах метод, Ж. Жиро приводит в соответствие каждому сингулярному оператору символ по следующему закону: если характеристика указанного оператора разлагается в ряд по m-мерным сферическим функциям[1])

[1]) Свободный член в ряде (1) отсутствует в силу условия (2) § 5.

порядка n:

$$f(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,m}(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,m}(x, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}), \quad (1)$$

то символ сингулярного оператора

$$a_0(x) u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy$$

определяется рядом

$$\Phi(x, \theta) = a_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n,m} Y_{n,m}(x, \theta), \quad (2)$$

где

$$\gamma_{n,m} = \frac{i^n \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}. \quad (3)$$

Сам Ж. Жиро рассматривал только тот случай (в настоящей главе мы им и ограничимся), когда коэффициент a_0 и характеристика f не зависят от полюса x.

По заданному символу сингулярный оператор восстанавливается (если это возможно) с точностью до вполне непрерывного в соответствующем пространстве $L_p(E_m)$ оператора; простейший сингулярный оператор по своему символу восстанавливается точно.

Очевидно, сумме сингулярных операторов соответствует сумма их символов; правило композиции сводится к тому, что *произведению операторов соответствует произведение их символов*.

Жиро опубликовал формулы (2) и (3) без вывода, который был впоследствии дан в статье автора [18]; этот вывод будет воспроизведен в последующих параграфах настоящей главы.

Из правила композиции, которое мы будем также называть правилом умножения символов, вытекает, что *умножение простейших сингулярных операторов коммутативно, если их символы не зависят от полюса*.

Переходим к выводу правила композиции. Будем считать, что ряд (1) сходится достаточно быстро; можно считать, что этот ряд сводится к конечной сумме. Тогда, очевидно, можно ограничиться случаем, когда внеинтегральные члены отсутствуют, а характеристики суть просто сферические функции.

§ 14. Формулы для справок

Приводимые ниже определения и формулы, относящиеся к сферическим функциям, заимствованы из статьи Э. Гейне [1], за исключением формул VII и VIII, которые хорошо известны и легко получаются из общих теорем теории ортогональных полиномов, и формул IX и X, которые по существу содержатся у Ф. Г. Мелера [1].

Во всех последующих параграфах настоящей главы мы полагаем $p=m-1$, где m — число измерений пространства. В остальном тексте книги буква p употребляется совсем в ином смысле; автор надеется, что это не приведет к путанице.

$$\text{I. } (1-2rt+r^2)^{-\frac{p-1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty} r^n I^{(n)}(p,\ t),$$

$$p>1,\ 0\leqslant r<1.$$

$I^{(n)}(p,\ t)$ — полином степени n относительно t; степень всех членов этого полинома одинаковой четности с n.

$$\text{II. } I^{(n)}(p,\ t)=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{2n+p-1}{2}\right)}{n!\sqrt{\pi}} I_0^{(n)}(p,\ t),$$

где старший коэффициент полинома $I_0^{(n)}(p,t)$ равен 1. В частности,

$$\text{IIA. } I^{(0)}(p,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right);$$

$$\text{IIB. } I^{(1)}(p,\ t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)t=\alpha_p t;$$

$$\text{IIC. } I^{(2)}(p,\ t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(t^2-\frac{1}{m}\right);$$

$$\text{IID. } I^{(3)}(p,\ t)=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)\left(t^3-\frac{3}{m+2}t\right);$$

$$\text{III. } I_\nu^{(n)}(p,\ t)=(1-t^2)^{\frac{\nu}{2}} I_0^{(n-\nu)}(p+2\nu,\ t);$$

мы несколько изменили данное Э. Гейне определение этих функций, чтобы сделать их вещественными в промежутке $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Точно так же изменены значения постоянных $c_\nu^{(n)}(p)$ и $k_\nu^{(n)}(p)$ (см. ниже).

IV. $$\int_{-1}^{+1} I_\nu^{(k)}(p, t) I_\nu^{(n)}(p, t)(1-t^2)^{\frac{p-2}{2}}\, dt = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ c_\nu^{(n)}(p), & k = n; \end{cases}$$

$$c_\nu^{(n)}(p) = \pi \frac{(2n-p+1)(n-\nu)!\,(n+\nu+p-2)!}{2^{2n+p+1}\Gamma^2\left(\frac{2n+p+1}{2}\right)}.$$

V. $$\int_{-1}^{+1} I^{(k)}(p, t) I^{(n)}(p, t)(1-t^2)^{\frac{p-2}{2}}\, dt = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ c^{(n)}(p), & k = n; \end{cases}$$

$$c^{(n)}(p) = \frac{(n+p-2)!}{2^{p-3}(2n+p-1)\, n!}.$$

VI. Теорема сложения:

$$I^{(n)}(p, \cos\gamma) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu^{(n)}(p) I_\nu^{(n)}(p, \cos\vartheta) I_\nu^{(n)}(p, \cos\vartheta^*) I^{(\nu)}(p-1, \cos\varphi),$$

где $\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta^* + \sin\vartheta\sin\vartheta^*\cos\varphi$ и

$$k_\nu^{(n)}(p) = \frac{2^{2\nu+p-3}(2\nu+p-3)\,\Gamma^2\left(\frac{2n+p-1}{2}\right)}{(n-\nu)!\,(n+\nu+p-2)!\sqrt{\pi}}.$$

VII. Рекуррентная формула:

$$I^{(n+1)}(p, t) = \frac{2n+p-1}{n+1} t I^{(n)}(p, t) - \frac{n+p-2}{n+1} I^{(n-1)}(p, t).$$

VIII. $$(t^2-1)\frac{d}{dt} I^{(n)}(p, t) =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2n+p-1} I^{(n+1)}(p, t) - \frac{(n+p-2)(n+p-1)}{2n+p-1} I^{(n-1)}(p, t).$$

IX. Интегральное уравнение сферических функций:

$$Y_{n,m}(\theta) = \frac{2n+m-2}{4\pi^{\frac{m-1}{2}}} \int_S Y_{n,m}(\theta^*) I^{(n)}(p, \cos\omega)\, dS.$$

X. $$\int_S V_{n,m}(\theta^*) I^{(k)}(p, \cos\omega)\, dS = 0, \quad n \neq k.$$

В формулах IX и X $Y_{n,m}(\theta)$ означает m-мерную сферическую функцию порядка n, S, как обычно, означает единичную сферу, θ и θ^* — ее точки с угловыми координатами $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$ и $\vartheta_1^*, \vartheta_2^*, \ldots, \vartheta_{m-1}^*$ соответственно; напомним, что (§ 6)

$$dS = \sin^{m-2}\vartheta_1^* \sin^{m-3}\vartheta_2^* \ldots \sin\vartheta_{m-2}^*\, d\vartheta_1^*\, d\vartheta_2^* \ldots d\vartheta_{m-1}^*;$$

углы ϑ_j, $j \leqslant m-2$, меняются в пределах от нуля до π' а угол ϑ_{m-1} — от $-\pi$ до π. Наконец, ω — угол между векторами $O\theta$ и $O\theta^*$, где O — центр сферы S.

XI. $$\cos\omega = \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_1^* + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_1^* \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_2^* + \\ + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_1^* \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_2^* \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_3^* + \ldots \\ \ldots + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_1^* \ldots \sin\vartheta_{m-2} \sin\vartheta_{m-2}^* \cos(\vartheta_{m-1} - \vartheta_{m-1}^*).$$

Ниже мы часто будем писать ϑ и ϑ^* вместо ϑ_1 и ϑ_1^*.

В заключение отметим, что сферическая функция порядка n, зависящая только от угла ϑ_1 лишь постоянным множителем отличается от функции $I^{(n)}(p, \cos\vartheta_1)$.

§ 15. Произведение операторов A_1 и A_n

Положим

$$A_n u = \int_{E_m} \frac{I^{(n)}(p, \cos\vartheta)}{r^m} u(y)\, dy; \tag{1}$$

ниже на протяжении настоящей главы мы будем опускать символ E_m под знаком интеграла.

Составим произведение $A_1 A_n$. По формуле IIВ имеем

$$A_1 u = \alpha_p \int u(y) \frac{\cos\vartheta}{r^m}\, dy.$$

Замечая, что $\frac{\cos\vartheta}{r^m}=\frac{1}{m-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r^{m-1}}\right)$, найдем по формуле дифференцирования (2) § 8

$$A_1u=\beta_p\frac{\partial}{\partial x_1}\int u(y)\frac{dy}{r^{m-1}},\qquad \beta_p=\frac{a_p}{p},$$

и, следовательно,

$$A_1A_nu=\beta_p\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{dy}{r_{xy}^{m-1}}\int\frac{I^{(n)}(p,\cos\vartheta_{yz})}{r_{yz}^m}u(z)\,dz,$$

ϑ_{yz} — первая угловая координата точки θ_{yz}: обозначения показаны на рис. 7.

Изменим порядок интегрирования:

$$A_1A_nu=\beta_p\frac{\partial}{\partial x_1}\int u(z)\,dz\times$$
$$\times\int\frac{I^{(n)}(p,\cos\vartheta_{yz})}{r_{xy}^{m-1}r_{yz}^m}dy \qquad (2)$$

и исследуем внутренний интеграл в (2):

$$J=\int\frac{I^{(n)}(p,\cos\vartheta_{yz})}{r_{xy}^{m-1}r_{yz}^m}dy. \qquad (3)$$

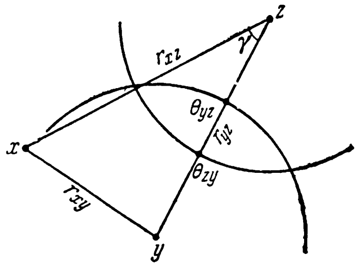

Рис. 7.

По определению сингулярного интеграла $J=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon$, где

$$J_\varepsilon=\int\limits_{r_{yz}>\varepsilon}\frac{I^{(n)}(p,\cos\vartheta_{yz})}{r_{xy}^{m-1}r_{yz}^m}dy. \qquad (4)$$

Начало сферических координат перенесем из точки y в точку z и введем обозначения

$$r_{xz}=r,\quad r_{yz}=\rho,\quad r_{xy}=\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos\gamma+r^2}.$$

Одновременно надо положить $\vartheta_{yz}=\pi-\vartheta_{zy}$, и, следовательно,

$$I^{(n)}(p,\cos\vartheta_{yz})=(-1)^nI^{(n)}(p,\cos\vartheta_{zy}).$$

Теперь

$$J_\varepsilon = (-1)^n \int\limits_S I^{(n)}(p,\, \cos\vartheta_{zy})\, dS \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{d\rho}{\rho\,(\rho^2 - 2\rho r\cos\gamma + r^2)^{\frac{m-1}{2}}}$$

или, если сделать замену $\rho = rt$, $\varepsilon = r\eta$,

$$J_\varepsilon = \frac{(-1)^n}{r^{m-1}} \int\limits_S I^{(n)}(\rho,\, \cos\vartheta_{zy})\, dS \int\limits_\eta^\infty \frac{dt}{t\,(t^2 - 2t\cos\gamma + 1)^{\frac{m-1}{2}}}. \tag{5}$$

Введя обозначение

$$G_m(\gamma) = \lim_{\eta\to 0} \left[\int\limits_\eta^\infty \frac{dt}{t\,(t^2 - 2t\cos\gamma + 1)^{\frac{m-1}{2}}} + \ln\eta \right], \tag{6}$$

получим после предельного перехода при $\eta \to 0$

$$J = \frac{(-1)^n}{r^{m-1}} \int\limits_S I^{(n)}(p,\, \cos\vartheta_{zy})\, G_m(\gamma)\, dS. \tag{7}$$

Введем новые координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, взяв точку z за начало координат и направив ось ξ_1 по лучу zx, а ось ξ_2 перпендикулярно к ξ_1 в двумерной плоскости, образованной лучом zx и прямой, проходящей через точку z параллельно оси x_1; остальные оси направим ортогонально к осям ξ_1 и ξ_2, а в остальном произвольно. С новой системой декартовых координат свяжем сферические координаты, и пусть точка y имеет сферические координаты $\rho, \vartheta_1^*, \vartheta_2^*, \ldots, \vartheta_{m-1}^*$. Очевидно, $\vartheta^* = \vartheta_1^* = \gamma$. Обозначим через $\overline{y}$, $\overline{x}_1$, $\overline{\xi}_1$, $\overline{\xi}_2$ орты направлений zy, zx_1, $z\xi_1$, $z\xi_2$. Имеем (рис. 8) $\cos\vartheta_{zy} = (\overline{y}, \overline{x}_1)$. Но вектор $\overline{x}_1$ лежит в плоскости (ξ_1, ξ_2), по-

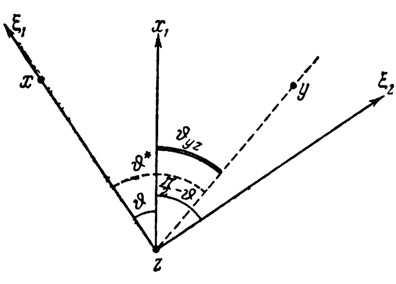

Рис. 8.

этому $\overline{x}_1 = \overline{\xi}_1 \cos \vartheta_{zx} + \overline{\xi}_2 \sin \vartheta_{zx}$ и, следовательно,

$$\cos \vartheta_{zy} = (\overline{y}, \overline{\xi}_1) \cos \vartheta_{zx} + (\overline{y}, \overline{\xi}_2) \sin \vartheta_{zx} = \\ = \cos \vartheta_{zx} \cos \vartheta^* + \sin \vartheta_{zx} \sin \vartheta^* \cos \vartheta_2^*.$$

По теореме сложения (формула VI)

$$I^{(n)}(p, \cos \vartheta_{zy}) = \\ = \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu^{(n)}(p) I_\nu^{(n)}(p, \cos \vartheta_{zx}) I_\nu^{(n)}(p, \cos \vartheta^*) I^{(\nu)}(p-1, \cos \vartheta_2^*).$$

В силу формулы IV, при подстановке последнего выражения в формулу (7) там исчезнут все слагаемые с $\nu \neq 0$, и мы получим

$$J = \frac{(-1)^n}{r^{m-1}} \frac{\varkappa_{n,m}}{\beta_p} I^{(n)}(p, \cos \vartheta_{zx}). \tag{8}$$

Здесь

$$\varkappa_{n,m} = \frac{\beta_p n!\, k_0^{(n)}(p)\, \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{2n+p-1}{2}\right)} \int\limits_S I_0^{(n)}(p, \cos \vartheta^*)\, G_m(\cos \vartheta^*)\, dS; \tag{9}$$

мы воспользовались формулой II A.

Перенесем теперь начало сферических координат в точку x и заменим ϑ_{zx} на $\pi - \vartheta_{xz}$. Это приведет нас к формуле

$$J = \frac{\varkappa_{n,m}}{\beta_p} \frac{1}{r^{m-1}} I^{(n)}(p, \cos \vartheta_{xz}). \tag{10}$$

Подставив это в соотношение (2) и заменив букву z на y, получим

$$A_1 A_n u = \varkappa_{n,m} \frac{\partial}{\partial x_1} \int u(y) \frac{I^{(n)}(p, \cos \vartheta)}{r^{m-1}} dy. \tag{11}$$

Выполним дифференцирование в формуле (11). Если $n > 1$, то поверхностный интеграл исчезает. Воспользовавшись формулами VII и VIII, найдем

$$A_1 A_n = \varkappa_{n,m} \left[\frac{(n+1)(n+p)}{2n+p-1} A_{n+1} - \frac{(n-1)(n+p-2)}{2n+p-1} A_{n-1} \right]. \tag{12}$$

Если $n=1$, то из формулы (11) вытекает

$$A_1^2 = \varkappa_{1,m}\left(2A_2 - \frac{4\pi^{\frac{m-1}{2}}}{m} I\right), \tag{13}$$

где I — тождественный оператор.

Из формул (12) и (13) сразу вытекает, что оператор A_n есть полином степени n относительно A_1. Отсюда, между прочим, следует, что операторы A_n перестановочны: $A_k A_n = A_n A_k$.

Умножив равенство (12) на A_1, получим важную для дальнейшего формулу

$$\begin{aligned} A_1^2 A_n = {} & \varkappa_{n,m}\varkappa_{n+1,m}\frac{(n+1)(n+2)(n+p)(n+p+1)}{(2n+p-1)(2n+p+1)} A_{n+2} - \\ & - \varkappa_{n,m}\left[\varkappa_{n+1,m}\frac{n(n+1)(n+p-1)(n+p)}{(2n+p-1)(2n+p+1)} + \right. \\ & \left. + \varkappa_{n-1,m}\frac{n(n-1)(n+p-2)(n+p-1)}{(2n+p-3)(2n+p-1)}\right] A_n + \\ & + \varkappa_{n,m}\varkappa_{n-1,m}\frac{(n-1)(n-2)(n+p-3)(n+p-2)}{(2n+p-3)(2n+p-1)} A_{n-2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Формула (14) верна, если n отлично от 1 и от 2. Если же $n=1$ или $n=2$, то к правой части формулы (14) следует добавить некоторые дополнительные слагаемые, которые не повлияют на ход дальнейших рассуждений.

Решающим моментом в нашем доказательстве теоремы композиции является вычисление постоянной $\varkappa_{n,m}$ и ее представление в виде некоторого произведения. Этим мы и займемся в ближайших параграфах.

§ 16. Произведение операторов A_2 и A_n

Пользуясь формулой дифференцирования (2) § 8 и формулами II B, II C, легко доказать, что

$$A_2 u = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int u(y)\frac{dy}{r^{m-2}} + \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{m} u(x). \tag{1}$$

Отсюда

$$A_2 A_n u = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{2\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int u(z)\,dz \int \frac{I^{(n)}(p, \cos\vartheta_{yz})}{r_{xy}^{m-2} r_{yz}^m}\,dy + \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{m} A_n u. \qquad (2)$$

Обозначим

$$K = \int \frac{I^{(n)}(p, \cos\vartheta_{yz})}{r_{xy}^{m-2} r_{yz}^m}\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{r_{yz}>\varepsilon} \frac{I^{(n)}(p, \cos\vartheta_{yz})}{r_{xy}^{m-2} r_{yz}^m}\,dy. \qquad (3)$$

Повторяя рассуждения § 15 и пользуясь формулами I и V, найдем

$$K = \frac{4\pi^{\frac{m}{2}} I^{(n)}(p, \cos\vartheta_{xz})}{n(n+p-1)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right) r^{m-2}}. \qquad (4)$$

Подставим это в (2). Изменив обозначение z на y и заменив A_2 по формуле (13) § 15, получим

$$A_1^2 A_n u = \mu_{n,m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int u(y) \frac{I^{(n)}(p, \cos\vartheta)}{r^{m-2}}\,dy; \qquad (5)$$

здесь для краткости положено

$$\mu_{n,m} = \frac{4\pi^{\frac{m-1}{2}}}{n(n+p-1)} \varkappa_{1,m}. \qquad (6)$$

Выполнив дифференцирование в (5) и сравнив результат с формулой (14) § 15, придем к соотношениям

$$\varkappa_{n,m}\varkappa_{n+1,m} = \frac{n+p-1}{n+p}\mu_{n,m}, \quad \varkappa_{n,m}\varkappa_{n-1,m} = \frac{n}{n+1}\mu_{n,m}. \qquad (7)$$

Отсюда

$$\frac{\varkappa_{n+1,m}}{\varkappa_{n-1,m}} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+p-1}{n+p}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varkappa_{n,m} = C\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)},$$

где C имеет разные значения для четных и нечетных n. Эти значения нетрудно выразить через $\varkappa_{1,m}$ и $\varkappa_{2,m}$, что приводит к формулам

$$\varkappa_{n,m}=\frac{\varkappa_{1,m}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}, \tag{8}$$

n нечетное;

$$\varkappa_{n,m}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\varkappa_{2,m}\frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}, \tag{9}$$

n четное.

Постоянную $\varkappa_{2,m}$ нетрудно вычислить. Для этого положим $n=1$ в первой из формул (7) и воспользуемся формулой (6). Мы получим тогда

$$\varkappa_{2,m}=\frac{4\pi^{\frac{m-1}{2}}}{m}. \tag{10}$$

Отсюда для четных n следует формула

$$\varkappa_{n,m}=\pi^{\frac{m}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}. \tag{11}$$

Ниже будет показано, что эта формула верна и для нечетных n.

§ 17. Вычисление $\varkappa_{1,m}$

Составим произведение $A_3A_1=A_1A_3$. По формулам (12) § 15 и (8) § 16 найдем

$$A_1A_3=\varkappa_{1,m}\frac{m}{(m+1)(m+4)}\,[2(m+2)A_4-mA_2]. \tag{1}$$

Вычислим это же произведение другим способом. Пусть $m>3$. Исходя из формулы II D и пользуясь формулой (2)

§ 8, найдем

$$A_3u = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(m+2)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{(m-2)(m-1)(m+1)} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \int u(y) \frac{dy}{r^{m-3}} + \frac{m}{2(m+1)} A_1 u.$$

Отсюда

$$A_3A_1u = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \times \frac{(m+2)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{(m-3)(m-1)(m+1)} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \int \frac{dy}{r_{xy}^{m-3}} \int u(z) \frac{I^{(1)}(p, \cos\vartheta_{yz})}{r_{yz}^m} dz + \frac{m}{2(m+1)} A_1^2 u. \qquad (2)$$

Первое слагаемое справа в (2) обозначим через Bu. Меняя порядок интегрирования и пользуясь формулой II B, получим

$$Bu = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{(m+2)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{(m-3)(m-1)(m+1)} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \int u(z)\, dz \int \frac{\cos\vartheta_{yz}}{r_{xy}^{m-3} r_{yz}^m} dy.$$

Повторяя рассуждения предшествующих параграфов, получим далее

$$Bu = \tau_m \frac{\pi^{\frac{m-3}{2}} m(m+2)\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{3(m-3)\,\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \int u(y) \frac{\cos\vartheta}{r^{m-3}} dy, \qquad (3)$$

где

$$\tau_m = \int_0^\pi \cos\vartheta\, G_{m-2}(\vartheta) \sin^{m-2}\vartheta\, d\vartheta; \qquad (4)$$

функция $G_{m-2}(\vartheta)$ определяется формулой (6) § 15.

Выполним дифференцирование в (3) и приравняем коэффициенты в полученной таким образом формуле и в формуле (1). Это приведет нас к соотношению

$$\varkappa_{1,m} = 4\pi^{\frac{m-2}{2}} \frac{(m-2)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{(m-3)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \tau_m. \qquad (5)$$

Займемся вычислением τ_m. Заметим, что прибавление к $G_{m-2}(\vartheta)$ слагаемого, которое не зависит от ϑ, не меняет величины τ_m. Беря по частям интеграл (6) § 15, легко получим разностное уравнение для G_m:

$$G_{m-2}(\vartheta)=G_m(\vartheta)-\cos\vartheta\int\limits_0^\infty(1-2t\cos\vartheta+t^2)^{-\frac{m-1}{2}}\,dt+\frac{1}{m-3}. \tag{6}$$

Если в этом уравнении отбросить постоянное слагаемое $(m-3)^{-1}$, то решение этого уравнения также изменится на постоянное слагаемое, а это не изменит величины τ_m. Мы примем поэтому, что

$$G_{m-2}(\vartheta)=G_m(\vartheta)-\cos\vartheta\int\limits_0^\infty(1-2t\cos\vartheta+t^2)^{-\frac{m-1}{2}}\,dt$$

и, следовательно,

$$\tau_m=\int\limits_0^\pi G_m(\vartheta)\cos\vartheta\sin^{m-2}\vartheta\,d\vartheta-$$
$$-\int\limits_0^\pi\cos^2\vartheta\sin^{m-2}\vartheta\,d\vartheta\int\limits_0^\infty(1-2t\cos\vartheta+t^2)^{-\frac{m-1}{2}}\,dt.$$

Вычитаемое легко вычисляется, и это дает

$$\tau_m=\delta_m-\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)},$$

где

$$\delta_m=\int\limits_0^\pi G_m(\vartheta)\cos\vartheta\sin^{m-2}\vartheta\,d\vartheta.$$

Подставив это в (5), найдем

$$\varkappa_{1,m}=\frac{4\pi^{\frac{m-2}{2}}(m-2)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{(m-3)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\delta_m-\frac{\pi^{\frac{m+1}{2}}(m-1)\,\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{(m-3)\,\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}.$$

Положив теперь в формуле (9) § 15 $n=1$ и произведя некоторые упрощающие элементарные преобразования, получим

$$\varkappa_{1,m}=\frac{2^m\pi^{\frac{m-3}{2}}\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{m-1}\delta_m.$$

Исключив δ_m из двух последних равенств, найдем окончательно

$$\varkappa_{1,m}=\frac{\pi^{\frac{m+1}{2}}\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \tag{7}$$

Формула (7) выведена в предположении, что $m>3$, однако непосредственное вычисление величины $\varkappa_{1,3}$ показывает, что упомянутая формула верна и при $m=3$. Подставив найденное значение $\varkappa_{1,m}$ в формулу (8) § 16, найдем, что формула (11) § 16 верна и для нечетных n.

§ 18. Символ многомерного сингулярного интеграла

Попытаемся найти такие числа $\gamma_{n,m}$ и σ_m, чтобы

$$A_n=\gamma_{n,m}I^{(n)}(p,h),\quad h=\frac{1}{\sigma_m}A_1. \tag{1}$$

При $n=1$ отсюда, в силу формулы II B, следует

$$\sigma_m=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\gamma_{1,m}. \tag{2}$$

Из формул (13) § 15, II C, (1) и (2) находим, далее,

$$\frac{4}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)\gamma_{1,m}^2h^2=2\varkappa_{1,m}\left[\frac{\gamma_{2,m}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(mh^2-I)-\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{m}I\right].$$

Отсюда

$$\gamma_{1,m}=\frac{i\pi^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}=\frac{i\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)},$$

$$\gamma_{2,m}=-\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{i^2\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)};$$

теперь из формулы (12) § 15 находим по индукции

$$\gamma_{n,m}=\frac{i^n\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}. \tag{3}$$

Тем самым правило композиции доказано для сингулярных интегралов, характеристики которых имеют вид $I^{(n)}(p, \cos\vartheta_1)$.

Рассмотрим теперь произведение двух сингулярных операторов, из которых один имеет характеристикой произвольную сферическую функцию $Y_{n,m}(\theta)$ порядка n, а другой — сферическую функцию первого порядка. Последняя имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} a_j\frac{y_j-x_j}{r}, \quad a_j=\text{const}.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда эта сумма имеет только одно слагаемое $a_j\frac{y_j-x_j}{r}$. Меняя подходящим образом нумерацию осей, можно считать $j=1$; постоянную $a_j=a_1$ возьмем равной α_p (см. формулу II В). Теперь дело сводится к композиции сингулярных интегралов с характеристиками $Y_{n,m}(\theta)$ и $I^{(1)}(p, \cos\vartheta_1)=I^{(1)}(p, \cos\vartheta)$. Обозначим

$$F_nu=\int u(y)\frac{Y_{n,m}(\theta)}{r^m}dy. \tag{4}$$

Рассуждая как в § 15, найдем

$$A_1F_nu=\beta_p\frac{\partial}{\partial x_1}\int Ju(z)dz; \tag{5}$$

на этот раз

$$J = \frac{1}{r^{m-1}} \int\limits_{S_z} \tilde{Y}_{n,m}(\theta_{zy})\, G_m(\gamma)\, dS; \tag{6}$$

$G_m(\gamma)$ определено формулой (6) § 15, $\tilde{Y}_{n,m}(\theta_{zy}) = Y_{n,m}(\theta_{yz})$; S_z — сфера радиуса единица с центром в точке z.

В формуле (5) заменим функцию $\tilde{Y}_{n,m}(\theta_{zy})$ ее выражением из интегрального уравнения IX. Изменив порядок интегрирования, получим

$$J = \frac{1}{r^{m-1}} \cdot \frac{2n+m-2}{4\pi^{\frac{m-1}{2}}} \int\limits_{S_y} \tilde{Y}_{n,m}(\theta^*)\, dS^* \int\limits_{S_z} G_m(\gamma)\, I^{(n)}(p, \cos\omega)\, dS. \tag{7}$$

Сравнив внутренний интеграл в (7) с интегралом (7) § 15, видим, что они отличаются только заменой θ_{zy} на ω. Но θ_{zy}

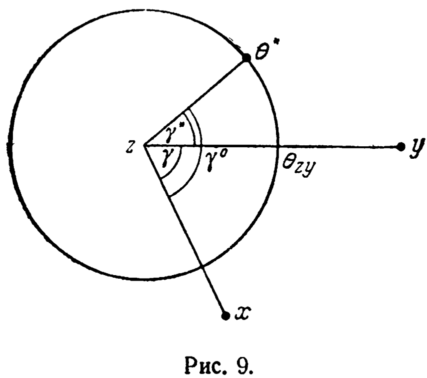

Рис. 9.

есть угол между вектором zy и осью x_1. Значит, в нашем случае роль этой оси играет ось $z\theta^*$ (рис. 9), и по формуле (8) § 15

$$\int\limits_{S_z} G_m(\gamma)\, I^{(n)}(p, \cos\omega)\, d\sigma = \frac{\gamma_{n,m}}{\beta_p} I^{(n)}(p, \cos\gamma^0).$$

Подставив это в формулу (7) и воспользовавшись еще раз интегральным уравнением IX, получим

$$J=\frac{1}{r^{m-1}}\cdot\frac{\varkappa_{n,m}}{\beta_p}\widetilde{Y}_{n,m}(\theta_{zx})=\frac{1}{r^{m-1}}\cdot\frac{\varkappa_{n,m}}{\beta_p}Y_{n,m}(\theta_{xz}).$$

Теперь

$$A_1F_nu=\varkappa_{n,m}\frac{\partial}{\partial x_1}\int u(y)\frac{Y_{n,m}(\theta)}{r^{m-1}}dy. \tag{8}$$

Чтобы получить дальнейшие результаты, выясним структуру сферической функции $Y_{n,m}\theta$. В формуле XI из всех слагаемых, кроме первого, вынесем за скобку множитель $\sin\vartheta_1\sin\vartheta_1^*$. Выражение в скобках обозначим через $\cos\psi$; оно имеет тот же вид, что и $\cos\omega$, но содержит одним слагаемым меньше и не зависит от углов ϑ_1 и ϑ_1^*. Теперь $\cos\omega=\cos\vartheta_1\cos\vartheta_1^*+\sin\vartheta_1\sin\vartheta_1^*\cos\psi$. По теореме сложения

$$I^{(n)}(p,\cos\omega)=\sum_{\nu=0}^{n}k_\nu^{(n)}(p)I_\nu^{(n)}(p,\cos\vartheta_1)\times$$
$$\times I_\nu^{(n)}(p,\cos\vartheta_1^*)I^{(\nu)}(p-1,\cos\psi).$$

Подставив это в интегральное уравнение сферических функций, найдем

$$Y_{n,m}(\theta)=\sum_{\nu=0}^{n}I_\nu^{(n)}(p,\cos\vartheta_1)\Phi_\nu^{(n)}(\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{m-1}), \tag{9}$$

где

$$\Phi_\nu^{(n)}=\frac{2n+m-2}{4\pi^{\frac{m-1}{2}}}k_\nu^{(n)}(p)\times$$
$$\times\int_S Y_{n,m}(\theta^*)I_\nu^{(n)}(p,\cos\vartheta_1^*)I^{(\nu)}(p-1,\cos\psi)\,dS^*.$$

Аналогично можно $\cos\psi$ представить в виде

$$\cos\psi=\cos\vartheta_2\cos\vartheta_2^*+\sin\vartheta_2\sin\vartheta_2^*\cos\psi_1$$

и применить теорему сложения к функции $I^{(\nu)}(p-1,\cos\psi)$. Продолжая этот процесс до исчерпания, получим представление функции $Y_{n,m}(\theta)$ в виде

$$Y_{n,m}(\theta) = \sum A_{n,\nu,\nu_1,\ldots,\nu_{m-2}} \times \\ \times I_\nu^{(n)}(p, \cos\vartheta_1) I_{\nu_1}^{(\nu)}(p-1, \cos\vartheta_2) \ldots \\ \ldots I_{\nu_{m-3}}^{(\nu_{m-2})}(2, \cos\vartheta_{m-2}) e^{\pm i\nu_{m-2}\vartheta_{m-1}}, \qquad (10)$$

где $n \geqslant \nu_1 \geqslant \nu_1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_{m-2}$ и $A_{n,\nu,\nu_1,\ldots,\nu_{m-2}}$ — постоянные.

Для наших целей достаточно ограничиться случаем, когда сумма (10) сводится к одному слагаемому с коэффициентом, равным единице:

$$Y_{n,m}(\theta) = I_\nu^{(n)}(p, \cos\vartheta)\,\Phi, \qquad (11)$$

где для краткости положено

$$\Phi = I_{\nu_1}^{(\nu)}(p-1, \cos\vartheta_2) \ldots I_{\nu_{m-3}}^{(\nu_{m-2})}(2, \cos\vartheta_{m-2}) e^{\pm i\nu_{m-2}\vartheta_{m-1}}.$$

Заметим, что Φ не зависит от n и что произведение $I_\nu^{(k)}(p, \cos\vartheta)\,\Phi$ есть сферическая функция порядка k, если $k \geqslant \nu$, и нуль, если $k < \nu$.

Выражение (11) подставим в формулу (8), в которой выполним дифференцирование. Отбросив случай $n = 1$, $Y_{n,m}(\theta) = I^{(1)}(p, \cos\vartheta)$, исследованный ранее, убедимся, что в остальных случаях внеинтегральный член в формуле дифференцирования исчезнет, и мы получим

$$A_1 F_n u = \varkappa_{n,m} \int u(y) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{I_\nu^{(n)}(p, \cos\vartheta)}{r^{m-1}} \right] \Phi\, dy.$$

Пользуясь формулой VIII, можно привести последнее равенство к виду

$$A_1 F_n u = \varkappa_{n,m} \int \frac{u(y)}{r^m} \Big[(p + 2\nu - n) I_\nu^{(n+1)}(p, \cos\vartheta) + \\ + \frac{(n-\nu)(n+p+\nu-2)(n+2p+2\nu-1)}{(2n+p-3)(2n+p-1)} I_\nu^{(n-1)}(p, \cos\vartheta) \Big] dy. \qquad (12)$$

Легко проверить, что тот же результат дает и правило композиции, которое тем самым доказано для того случая, когда один из перемножаемых операторов имеет характеристикой сферическую функцию первого порядка, а второй — сферическую функцию произвольного порядка.

Переход к общему случаю основан на следующей лемме.

Лемма 1.18. *Сферическая функция порядка n может быть представлена в виде суммы произведений сферических функций порядков* 1 *и* $n-1$.

По рекуррентной формуле VII

$$I^{(n)}(p, \cos\omega) = \frac{2n+p-3}{n} \times \\ \times \cos\omega I^{(n-1)}(p, \cos\omega) - \frac{n+p-3}{n} I^{(n-2)}(p, \cos\omega).$$

Подставим это в интегральное уравнение IX. В силу формулы X второе слагаемое исчезнет, и мы получим

$$Y_{n,m}(\theta) = \frac{2n+p-3}{n} \int_S Y_{n,m}(\theta^*) \cos\omega I^{(n-1)}(p, \cos\omega)\, dS^*.$$

Функции $\cos\vartheta_1$, $\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2$, ... суть сферические функции первого порядка, поэтому формулу XI можно записать в виде

$$\cos\omega = \sum Y_{1,m}(\theta) Y_{1,m}(\theta^*).$$

Теперь

$$Y_{n,m}(\theta) = \sum Y_{1,m}(\theta) \int_S \frac{2n+p-3}{n} \times \\ \times Y_{n,m}(\theta^*) Y_{1,m}(\theta^*) I^{(n-1)}(p, \cos\omega)\, dS^*. \qquad (13)$$

Каждый интеграл в (13) есть сферическая функция порядка $n-1$. Лемма доказана.

Допустим теперь, что правило композиции верно, если характеристика первого из перемножаемых сингулярных операторов есть сферическая функция порядка $n-1$. Докажем, что теорема верна и для характеристики порядка n. Пусть характеристики компонируемых интегралов суть $Y_{n,m}(\theta)$ и $Y_{k,m}(\theta)$. Составим их символы $\gamma_{n,m} Y_{n,m}(\theta)$ и $\gamma_{k,m} Y_{k,m}(\theta)$. Первый символ разложим, в соответствии с леммой 1.18, в сумму произведений сферических функций порядков 1 и $n-1$. Пользуясь сочетательностью композиции, скомпонируем сперва характеристику порядка $n-1$ с характеристикой $Y_{k,m}(\theta)$, а затем характеристику порядка 1 с полученным результатом. В обоих случаях правило композиции справедливо, значит, оно справедливо и для композиции характеристик $Y_{n,m}(\theta)$ и $Y_{k,m}(\theta)$.

Правило умножения символов при композиции остается верным и тогда, когда сингулярные интегралы распространены по замкнутому ляпуновскому многообразию. Докажем это. Как и выше, ограничимся случаем, когда характеристики не зависят от полюса.

Итак, пусть

$$A_j\tilde{u}=\int\limits_{\Gamma}\tilde{K}_j(\xi,\ \eta)\,\tilde{u}(\eta)\,d\eta,\quad j=1,2.$$

Воспользуемся формулой (12) § 5. Сумма первых двух слагаемых в правой части этой формулы есть интегральный оператор, ядро которого имеет слабую особенность в любой внутренней подобласти D; обозначая его через A'_j, имеем

$$A_j\tilde{u}=A'_j\tilde{u}+\int\limits_D\frac{f_j(\theta)}{r^m}\,u(y)\,dy,\quad j=1,\ 2.$$

Нетрудно видеть, что произведения $A_2A'_1$ и A'_2A_1 суть интегральные операторы, ядра которых имеют слабую особенность в любой внутренней подобласти D, и дело сводится к композиции

$$\int\limits_D\frac{f_2(\theta_{xy})}{r^m_{xy}}\,dy\int\limits_D u(z)\,\frac{f_1(\theta_{yz})}{r^m_{yz}}\,dz.\tag{14}$$

Доопределим плотность $u(z)$, положив ее равной нулю вне D. Тогда интеграл (14) принимает вид

$$\int\limits_D\frac{f_2(\theta_{xy})}{r^m_{xy}}\,dy\int\limits_{E_m}u(z)\,\frac{f_1(\theta_{yz})}{r^m_{yz}}\,dz=$$
$$=\int\limits_{E_m}\frac{f_2(\theta_{xy})}{r^m_{xy}}\,dy\int\limits_{E_m}u(z)\,\frac{f_1(\theta_{yz})}{r^m_{yz}}\,dz-$$
$$-\int\limits_{E_m-D}\frac{f_2(\theta_{xy})}{r^m_{xy}}\,dy\int\limits_D u(z)\,\frac{f_1(\theta_{yz})}{r^m_{yz}}\,dz.$$

Первое слагаемое подчиняется правилу умножения символов при композиции. Во втором слагаемом ядро внешнего интеграла достаточно гладкое, если точка x фиксирована внутри D и $y \bar{\in} D$, а ядро внутреннего интеграла — сингулярное. Композиция таких интегралов приводит к интегралу с ядром, во всяком случае непрерывным, если точки x и z лежат внутри D. Наше утверждение доказано.

ГЛАВА IV

СВОЙСТВА СИМВОЛА

§ 19. Преобразование Фурье сингулярного ядра

К сингулярным интегралам преобразование Фурье впервые применили А. Кальдерон и А. Зигмунд в статье [1]. В настоящем параграфе мы изложим некоторые относящиеся к этому вопросу результаты упомянутых авторов.

Рассмотрим сингулярный интеграл, характеристика которого не зависит от полюса

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{E_m} K(x-y)\, u(y)\, dy, \quad K(x-y) = \frac{f(\theta)}{r^m}. \tag{1}$$

Будем обозначать буквой F преобразование Фурье. Формальное применение теоремы о свертке дает

$$Fv = FK \cdot Fu; \tag{2}$$

при этом FK определяется равенством

$$FK = \lim_{\varepsilon \to 0,\, N \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\varepsilon < |x| < N} e^{-i(x,z)} K(x)\, dx. \tag{3}$$

Задача заключается в обосновании формул (2) и (3).

Будем считать, что характеристика ограничена; как всегда, предполагаем выполненным и условие (2) § 5. Введем в рассмотрение ядро

$$K_{\varepsilon, N}(x) = \begin{cases} K(x), & \varepsilon \leqslant |x| \leqslant N, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{4}$$

и рассмотрим интеграл

$$v_{\varepsilon, N}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{E_m} K_{\varepsilon, N}(x-y)\, u(y)\, dy. \tag{5}$$

Для простоты допустим, что функция $u(y)$ финитна (т. е. отлична от нуля только на некотором компактном множестве) и бесконечно дифференцируема. Применение теоремы о свертке, которое в данном случае не вызывает сомнений дает

$$Fv_{\varepsilon, N} = FK_{\varepsilon, N} \cdot Fu. \tag{6}$$

Имеем

$$FK_{\varepsilon, N} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{E_m} K_{\varepsilon, N}(x)\, e^{-i(x, z)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\varepsilon}^{N} \frac{dR}{R} \int_{S} f(\theta)\, e^{-i\rho R \cos\gamma}\, dS =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\varepsilon\rho}^{N\rho} \frac{dt}{t} \int_{S} f(\theta)\, e^{-it\cos\gamma}\, dS.$$

Здесь введены обозначения $\rho = |z|$, $R = |x|$, $\theta = \frac{x}{R}$; γ — угол между векторами x и z.

Условие (2) § 5 позволяет представить последнее равенство в виде

$$FK_{\varepsilon, N} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\varepsilon\rho}^{N\rho} \frac{dt}{t} \int_{S} f(\theta)\, (e^{-it\cos\gamma} - e^{-t})\, dS =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{S} f(\theta)\, dS \int_{\varepsilon\rho}^{N\rho} \frac{e^{-it\cos\gamma} - e^{-t}}{t}\, dt. \tag{7}$$

Обозначим $\varepsilon\rho = \varepsilon'$, $N\rho = N'$. Внутренний интеграл разобьем на два:

$$\int_{\varepsilon'}^{N'} \frac{e^{-it\cos\gamma} - e^{-t}}{t}\,dt =$$

$$= \int_{\varepsilon'}^{1} \frac{e^{-it\cos\gamma} - e^{-t}}{t}\,dt + \int_{1}^{N'} \frac{e^{-it\cos\gamma} - e^{-t}}{t}\,dt.$$

При $\varepsilon' \to 0$ первый интеграл равномерно стремится к аналогичному интегралу с пределами $t = 0$ и $t = 1$. Нетрудно видеть, что при $|\cos\gamma| \geqslant \delta$, $\delta = \text{const} > 0$, второй интеграл равномерно сходится к интегралу с пределами $t = 1$ и $t = \infty$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выполнить следующее интегрирование по частям:

$$\int_{1}^{N'} \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t}\,dt = -\left.\frac{e^{-it\cos\gamma}}{it\cos\gamma}\right|_{1}^{N'} - \frac{1}{i\cos\gamma}\int_{1}^{N'} \frac{e^{-it\cos\gamma}}{t^2}\,dt$$

и заметить, что при $|\cos\gamma| \geqslant \delta$ и $N' \to \infty$ оба члена справа равномерно стремятся к своим пределам.

Из сказанного, в частности, следует, что при $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ существует предел внутреннего интеграла в (7), когда $\varepsilon' \to 0$ и $N' \to \infty$.

Докажем еще, что имеет место неравенство

$$\left|\int_{\varepsilon'}^{N'} \frac{e^{-it\cos\gamma} - e^{-t}}{t}\,dt\right| \leqslant \ln\frac{a}{|\cos\gamma|}, \quad a = \text{const}.$$

Для этого достаточно установить, что

$$\left|\int_{1}^{N'} \frac{e^{-it\alpha}}{t}\,dt\right| \leqslant \ln\frac{1}{|\alpha|} + M, \quad M = \text{const}.$$

Пусть, например, $\alpha > 0$. Имеем

$$\int_{1}^{N'} \frac{e^{-it\alpha}}{t}\,dt = \int_{\alpha}^{\alpha N'} \frac{e^{-it}}{t}\,dt.$$

Если $\alpha N' \leqslant 1$, то

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\alpha N'} \frac{e^{-it}}{t} dt \right| \leqslant \ln N' \leqslant \ln \frac{1}{\alpha},$$

если же $\alpha N' > 1$, то

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha N'} \frac{e^{-it}}{t} dt = \int\limits_{\alpha}^{1} \frac{e^{-it}}{t} dt + \int\limits_{1}^{\alpha N'} \frac{e^{-it}}{t} dt;$$

справа первое слагаемое не превосходит по модулю величины $\ln \frac{1}{\alpha}$, второе же ограничено некоторой постоянной M, так как интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} t^{-1} e^{-it} dt$ сходится. Тем самым наше утверждение доказано. Теперь, так как функция $f(\theta)$ ограничена, то при $\rho \neq 0$ интеграл (7) ограничен и равномерно стремится к некоторому пределу при $\varepsilon \to 0$ и $N \to \infty$; этот предел, следовательно, также ограничен. Приняв этот предел за преобразование Фурье ядра K, мы тем самым получаем обоснование формулы (3).

Важно отметить, что при $\rho \neq 0$ функция FK не зависит от ρ — это сразу следует из формулы (7).

Для обоснования формулы (3) нет необходимости требовать, чтобы $f(\theta)$ была ограниченной; достаточно, чтобы

$$\int\limits_{S} |f(\theta)| \ln^{+} |f(\theta)| \, dS < \infty.$$

Из формулы (6) вытекает теперь, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\ N \to \infty} Fv_{\varepsilon, N} = FK \cdot Fu. \tag{8}$$

Финитная и бесконечно дифференцируемая функция $u(x)$ во всяком случае принадлежит пространству $L_2(E_m)$. Тому же пространству принадлежит и Fu. Так как функция $FK_{\varepsilon, N}$ ограничена и равномерно стремится к FK, то $Fv_{\varepsilon, N} \in L_2(E_m)$ и сходимость в формуле (8) можно трактовать как сходимость в $L_2(E_m)$.

Обозначим

$$Fv_{\varepsilon, N} = w_{\varepsilon, N}, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0,\ N \to \infty} Fv_{\varepsilon, N} = w.$$

Тогда

$$v_{\varepsilon, N} = F^{-1} w_{\varepsilon, N} \to F^{-1} w.$$

В то же время $v_{\varepsilon, N}(x) \to v(x)$. Отсюда $v(x) = F^{-1} w$, или $w = Fv$. Формула (2) доказана, по крайней мере, для функций бесконечно дифференцируемых и финитных.

§ 20. Преобразование Фурье ядра и символ сингулярного оператора

В предшествующем параграфе для сингулярного интеграла

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{E_m} K(x-y) u(y)\, dy, \quad K(x-y) = \frac{f(\theta)}{r^m}, \tag{1}$$

была установлена формула

$$Fv = FK \cdot Fu, \tag{2}$$

где F — преобразование Фурье. Положим теперь

$$w(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{E_m} K_1(x-y) v(y)\, dy, \quad K_1(x-y) = \frac{f_1(\theta)}{r^m}.$$

Тогда

$$Fw = FK_1 \cdot Fv = FK_1 \cdot FK \cdot Fu. \tag{3}$$

Таким образом, композиции сингулярных интегралов, характеристики которых не зависят от полюса, соответствует произведение преобразований Фурье их ядер. Но этим же свойством обладают и символы сингулярных интегралов, поэтому возникает задача — установить связь между символом сингулярного интеграла и преобразованием Фурье его ядра. Решение этой задачи будет дано в настоящем параграфе.

Рассмотрим случай, когда характеристика представляет собой сферическую функцию первого порядка; в этом случае

$$K(x-y)=\sum_{j=1}^{m} a_j \frac{y_j-x_j}{r^{m+1}}. \tag{4}$$

Вычислим преобразование Фурье ядра (4). Очевидно, можно ограничиться случаем, когда сумма (4) содержит только одно слагаемое. Нумерацию осей выберем так, чтобы $j=1$; возьмем еще $a_1=(2\pi)^{\frac{m}{2}}$. Теперь

$$K(x-y)=(2\pi)^{\frac{m}{2}}\frac{y_1-x_1}{r^{m+1}}.$$

Введем сферические координаты с центром в начале декартовых координат. Пусть сферические координаты точки x будут $R, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. Тогда

$$K(x)=-(2\pi)^{\frac{m}{2}}\frac{x_1}{R^{m+1}}=\frac{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}{m-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{R^{m-1}}\right)$$

и, следовательно,

$$FK=\frac{1}{m-1}\lim_{\varepsilon\to 0,\ N\to\infty}\int\limits_{\varepsilon<R<N} e^{-i(x,\,z)}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{R^{m-1}}\right)dx.$$

Интеграл возьмем по частям. Нетрудно видеть, что при $\varepsilon\to 0$ и $N\to\infty$ полученные поверхностные интегралы стремятся к нулю. Отсюда

$$FK=\frac{iz_1}{m-1}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{R<N} e^{-i(x,\,z)}\frac{dx}{R^{m-1}}. \tag{5}$$

Обозначая через γ угол между векторами x и z, через ρ — длину вектора z и полагая $R\rho=t$, имеем

$$FK=\frac{i}{m-1}\cos\vartheta_1\int_0^\infty dt\int_S e^{-it\cos\gamma}\,dS; \tag{6}$$

через ϑ_1 обозначена угловая координата точки z относительно начала.

Остается вычислить интеграл

$$I=\frac{1}{m-1}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_S e^{-it\cos\gamma}\,dS. \tag{7}$$

Для этого направим ось x_1 по вектору z. Тогда $\gamma=\lambda_1$ и, полагая $m>3$, имеем

$$\frac{1}{m-1}\int\limits_S e^{-it\cos\gamma}\,dS=\frac{2\pi}{m-1}\int\limits_0^\pi e^{-it\cos\lambda_1}\sin^{m-2}\lambda_1\,d\lambda_1\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{m-3}\int\limits_0^\pi \sin^k\lambda\,d\lambda=\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\cos\lambda)\sin^{m-2}\lambda\,d\lambda.$$

Сделаем подстановку $\cos\lambda=\xi$ и, считая по-прежнему $m>3$, возьмем интеграл по частям. Это даст нам

$$\frac{1}{m-1}\int\limits_S e^{-it\cos\gamma}\,dS=\frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}(m-3)}{t\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\int\limits_0^1 \xi(1-\xi^2)^{\frac{m-5}{2}}\sin t\xi\,d\xi. \tag{8}$$

Подставим это в (7). Меняя порядок интегрирования и пользуясь формулой

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t\xi}{t}\,dt=\frac{\pi}{2},\qquad \xi>0,$$

легко найдем, что

$$I=\frac{\pi^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \tag{9}$$

Вычисления упрощаются, если $m=3$, и приводят к той же формуле (9). Докажем, что эта формула верна и при $m=2$. Действительно, в этом случае $dS=d\gamma$, $-\pi\leqslant\gamma\leqslant\pi$, и

$$I=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-it\cos\gamma}\,d\gamma=2\pi\int\limits_0^\infty J_0(t)\,dt=2\pi.$$

так как (см., например, Э. Грей и Г. В. Метьюз [1])

$$\int_0^\infty J_0(t)\,dt = 1.$$

Итак, формула (9) установлена для всех $m \geqslant 2$. Теперь формула (6) принимает вид

$$FK = \frac{i\pi^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \cos \vartheta_1. \tag{10}$$

Формула (10) показывает, что преобразование Фурье ядра $(2\pi)^{\frac{m}{2}} \frac{y_1 - x_1}{r^{m+1}}$ равно символу ядра $\frac{y_1 - x_1}{r^{m+1}}$. Имея это в виду, будем впредь записывать сингулярный интеграл в виде

$$au(x) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{E_m} K(x-y)\,u(y)\,dy$$

и называть $K(x-y)$ ядром этого интеграла. В таких терминах справедлива следующая

Теорема 1.20. *Пусть характеристика сингулярного интеграла не зависит от полюса и квадратично суммируема по единичной сфере S. Тогда символ этого интеграла совпадает с преобразованием Фурье его ядра.*

В случае, когда характеристика есть сферическая функция первого порядка, теорема 1.20 непосредственно вытекает из формулы (10) настоящего параграфа и формул (2) — (3) § 13. На полиномиальные характеристики эта теорема просто распространяется применением формулы (3) и разложением сферического полинома в сумму произведений сферических полиномов первого порядка. Остается распространить теорему на более общие характеристики, указанные в условии теоремы.

Символ есть оператор над характеристикой, вполне непрерывный в пространстве $L_2(S)$. Действительно, из формул (2) — (3) § 13 вытекает, что этот оператор — нормальный, его собственные функции — m-мерные сферические функции — образуют в $L_2(S)$ полную систему, а его собственные числа, совпадающие с числами $\gamma_{n,m}$, стремятся к нулю. Дальнейшее основано на следующей лемме.

Лемма 1.20. *Пусть* $K(x-y)=(2\pi)^{\frac{m}{2}}\frac{f(\theta)}{r^m}$, *где* $f(\theta)\in L_2(S)$ *и выполнено условие* (2) § 5. *Тогда преобразование Фурье ядра* K *есть оператор над* f, *вполне непрерывный в* $L_2(S)$.

Достаточно считать, что $z\neq 0$. Тогда подстановкой $x'=|z|x$ мы сведем дело к случаю $|z|=1$. Но это значит, что FK есть функция точки единичной сферы S. Далее $\left(\theta=\frac{x}{R}\right)$,

$$\int\limits_{E_m} e^{-i(x,\,z)}\frac{f(\theta)}{R^m}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0,\ N\to\infty}\int\limits_{\varepsilon<R<N} e^{-i(x,\,z)}\frac{f(\theta)}{R^m}\,dx=$$
$$=\int\limits_S f(\theta)\,dS\int\limits_0^1\frac{e^{-i(x,\,z)}-1}{R}\,dR+\int\limits_S f(\theta)\,dS\int\limits_1^\infty\frac{e^{-i(x,\,z)}}{R}\,dR.$$

Ядро первого интеграла непрерывно; исследуем второй интеграл.

Пусть γ — угол между векторами x и z. Принимая во внимание, что $|z|=1$, получим

$$\int\limits_1^\infty\frac{e^{-i(x,\,z)}}{R}\,dR=\int\limits_1^\infty\frac{e^{-iR\cos\gamma}}{R}\,dR.$$

Выполнив подстановку $R|\cos\gamma|=t$, легко найдем, что

$$\int\limits_1^\infty\frac{e^{-iR\cos\gamma}}{R}\,dR=\ln\frac{1}{|\cos\gamma|}+\text{ограниченная функция.}$$

Таким образом, FK выражается через характеристику в виде интегрального оператора с ядром, которое только на ограниченное слагаемое отличается от функции $\ln\frac{1}{|\cos\gamma|}$. Такое ядро квадратично суммируемо. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что двойной интеграл

$$\int\limits_S\int\limits_S\ln^2\frac{1}{|\cos\gamma|}\,dS\,dS_1=\int\limits_S dS\int\limits_S\ln^2\frac{1}{|\cos\gamma|}\,dS_1$$

конечен. Для вычисления внутреннего интеграла выберем такую систему координат, чтобы первая ось прошла через точку θ. Тогда (ср. § 9) внутренний интеграл принимает вид

$$\int_0^\pi \ln^2 \frac{1}{|\cos\gamma|} \sin^{m-2}\gamma\, d\gamma \int_0^\pi \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{m-3}\vartheta_2 \ldots$$
$$\ldots \sin\vartheta_{m-2}\, d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{m-1},$$

и ясно, что он представляет собой конечную постоянную. Но тогда конечен и двойной интеграл, а отсюда уже следует, что FK есть вполне непрерывный в $L_2(S)$ оператор над характеристикой.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1.20, достаточно заметить, что два вполне непрерывных оператора над характеристикой: символ и преобразование Фурье ядра, совпадающие на плотном в $L_2(S)$ множестве сферических полиномов, совпадают всюду в $L_2(S)$.

Из хода доказательства леммы 1.20 видно, что символ есть интегральный оператор над характеристикой, ядро которого имеет вид

$$\ln\frac{1}{|\cos\gamma|} + Q(\cos\gamma). \tag{11}$$

Нетрудно найти функцию Q.

1°. Пусть $\cos\gamma > 0$. Подстановка $R\cos\gamma = t$ дает

$$\int_1^\infty \frac{e^{-iR\cos\gamma}}{R}\, dR = \int_{\cos\gamma}^\infty \frac{e^{-it}}{t}\, dt = \int_{\cos\gamma}^1 \frac{e^{-it}-1}{t}\, dt + \ln\frac{1}{\cos\gamma} +$$
$$+ \int_1^\infty \frac{e^{-it}}{t}\, dt.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \frac{e^{-iR\cos\gamma}-1}{R}\, dR = \int_0^{\cos\gamma} \frac{e^{-it}-1}{t}\, dt.$$

Отсюда

$$Q(\cos\gamma) = \int_0^1 \frac{e^{-it}-1}{t}\, dt + \int_1^\infty \frac{e^{-it}}{t}\, dt =$$
$$= -\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t}\, dt + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt - \frac{i\pi}{2} = \alpha - \frac{i\pi}{2}.$$

2°. Пусть теперь $\cos\gamma < 0$. Полагая $-R\cos\gamma = t$ и повторяя предшествующие выкладки, получим

$$Q(\cos\gamma) = -\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} + \frac{i\pi}{2} = \alpha + \frac{i\pi}{2}.$$

В силу условия (2) § 5 можно отбросить постоянную α в ядре (11) и можно, следовательно, принять, что ядро интегрального оператора, выражающего символ через характеристику, имеет вид

$$\ln\frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2}\,\mathrm{sign}\cos\gamma. \tag{12}$$

Формула (12) приведена в статье А. Кальдерона и А. Зигмунда [4].

В заключение настоящего параграфа отметим следующее. Если

$$Au = au(x) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m}u(y)\,dy, \tag{13}$$

то из формулы (2) и из теоремы 1.20 вытекает новое представление сингулярного оператора A:

$$Au = F^{-1}\Phi F u, \tag{14}$$

где Φ есть символ оператора A:

$$\Phi(\theta) = a + F\left(\frac{f(\theta)}{r^m}\right),$$

а F означает преобразование Фурье в E_m.

Замечание. Основной результат настоящего параграфа состоит в том, что символ сингулярного интеграла (характеристика которого не зависит от полюса) совпадает с преобразованием Фурье его ядра. Можно принять этот результат за определение и назвать символом преобразование Фурье ядра сингулярного интеграла. При таком определении формулы Жиро (формулы (2) и (3) § 13) вытекают также из результатов Бохнера [1].

§ 21. Преобразование символа при замене переменных

Допустим, что в некотором сингулярном операторе вида

$$a(x)\,u(x)+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int\limits_{E_m} K(x,\ x-y)\,u(y)\,dy,$$

$$K(x,\ x-y)=\frac{f(x,\ \theta)}{r^m},$$

выполнено преобразование переменных интегрирования — координат точки y — и одновременно выполнено такое же преобразование координат точки x. Примем, что указанное преобразование взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и имеет якобиан, ограниченный сверху и снизу положительными числами. Выясним, как меняется символ при таком преобразовании.

Символ определяется локально, т. е. при фиксированном x, поэтому можно ограничиться случаем, когда коэффициент a и характеристика f не зависят от полюса, так что сингулярный оператор имеет вид

$$Au=au(x)+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int\limits_{E_m} K(x-y)\,u(y)\,dy, \qquad K(x-y)=\frac{f(\theta)}{r^m}. \tag{1}$$

Символ оператора A определяется формулой

$$\Phi(x)=a+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int\limits_{E_m} K(y)\,e^{-i(x,\,y)}\,dy. \tag{2}$$

Та же локальность определения символа позволяет ограничиться рассмотрением того случая, когда преобразование переменных — линейное. Запишем его в виде

$$x=\mathfrak{A}\xi, \quad y=\mathfrak{A}\eta; \tag{3}$$

$\mathfrak{A}$ — матрица преобразования. Пусть в новых переменных $K(x) = \hat{K}(\xi)$, $u(x) = \hat{u}(\xi)$. Тогда

$$Au = b\hat{u}(\xi) + \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{E_m} \hat{K}(\xi - \eta)\, \hat{u}(\eta)\, d\eta, \tag{4}$$

где J — определитель матрицы $\mathfrak{A}$,

$$b = a + \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{|\eta|=1} \hat{K}(\eta) \ln \frac{|y|}{|\eta|}\, d\sigma, \tag{5}$$

$d\sigma$ — элемент поверхности сферы $|\eta| = 1$; формулы (4) и (5) легко вытекают из формулы (6) § 5. Символ оператора (4) равен

$$\hat{\Phi}(\xi) = b + \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{E_m} \hat{K}(\eta)\, e^{-i(\xi, \eta)}\, d\eta. \tag{6}$$

Запишем формулу (2) в виде

$$\Phi(x) = a + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0,\, N \to \infty} \int\limits_{\varepsilon < |y| < N} K(y)\, e^{-i(x, y)}\, dy$$

и положим здесь $x = \mathfrak{A}\xi$, $y = \mathfrak{A}\eta$. Обозначим $g(\eta) = |y|^2 = (\mathfrak{A}\eta, \mathfrak{A}\eta)$, $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}\xi = \zeta$. Тогда

$$\Phi(x) = a + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0,\, N \to \infty} J \int\limits_{\varepsilon^2 < g(\eta) < N^2} \hat{K}(\eta)\, e^{-i(\mathfrak{A}\xi, \mathfrak{A}\eta)}\, d\eta =$$

$$= a + \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0,\, N \to \infty} \int\limits_{\varepsilon^2 < g(\eta) < N^2} \hat{K}(\eta)\, e^{-i(\zeta, \eta)}\, d\eta =$$

$$= \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{(g > \varepsilon^2) \cap (|\eta| < 1)} \hat{K}(\eta)\, e^{-i(\zeta, \eta)}\, d\eta +$$

$$+ \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \lim_{N \to \infty} \int\limits_{(g < N^2) \cap (|\eta| > 1)} \hat{K}(\eta)\, e^{-i(\zeta, \eta)}\, d\eta + a. \tag{7}$$

В первом интеграле введем сферические координаты с центром в начале. Пусть при этом

$$d\eta = \rho^{m-1}\, d\rho\, d\sigma, \quad \hat{K}(\eta) = \frac{\hat{f}(\theta)}{\rho^m},$$

и пусть $\rho = \omega(\theta, \varepsilon)$ — уравнение поверхности $g(\eta) = \varepsilon^2$ в сферических координатах. Первое слагаемое в (7) равно

$$\frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\eta|=1} d\sigma \int\limits_{\omega(\theta, \varepsilon)}^{1} \hat{f}(\theta)\, e^{-i(\zeta, \eta)} \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{|\eta|=1} \hat{f}(\theta)\, d\sigma \int\limits_{0}^{1} [e^{-i(\zeta, \eta)} - 1] \frac{d\rho}{\rho} +$$

$$+ \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\eta|=1} \hat{f}(\theta) \ln \frac{1}{\omega(\theta, \varepsilon)}\, d\sigma.$$

Функция $\hat{f}(\theta)$ необходимо удовлетворяет условию (2) § 5, поэтому первый интеграл равен сингулярному интегралу (его неинтегрируемая особенность — в начале координат)

$$\frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{|\eta| < 1} \hat{K}(\eta)\, e^{-i(\zeta, \eta)}\, d\eta;$$

второй интеграл, в силу того же условия (2) § 5, можно представить в виде

$$\frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|\eta|=1} \hat{f}(\theta) \ln \frac{\varepsilon}{\omega(\theta, \varepsilon)}\, d\sigma. \tag{8}$$

Отношение $\frac{\varepsilon}{\omega(\theta, \varepsilon)}$ не зависит от ε, поэтому можно знак предела отбросить, а величине ε придать любое значение. Заметим, что

$$\frac{\varepsilon}{\omega(\theta, \varepsilon)} = \frac{|y|}{|\eta|},$$

и выражение (8) равно

$$\frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{|\eta|=1} \hat{f}(\theta) \ln \frac{|y|}{|\eta|} \, d\sigma = b - a.$$

Собирая результаты, находим, что первый предел в (7) равен

$$b - a + \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{|\eta|<1} \hat{K}(\eta) e^{-i(\zeta, \eta)} \, d\eta. \tag{9}$$

Рассмотрим второй предел в (7):

$$\lim_{N \to \infty} \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{1<\rho<\omega(\theta, N)} \hat{K}(\eta) e^{-i(\zeta, \eta)} \, d\eta.$$

Зададим число $\delta > 0$ и выберем N_1 столь большим, чтобы

$$\left| \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\rho > N_1} \hat{K}(\eta) e^{-i(\zeta, \eta)} \, d\eta \right| < \frac{\delta}{2}. \tag{10}$$

Пусть λ_1 — наименьшее собственное число формы $g(\eta)$. Тогда $\omega(\theta, N) \leqslant \lambda_1^{-\frac{1}{2}} N$. Подчиним N_1 еще неравенству $\lambda_1^{-\frac{1}{2}} N \leqslant N_1 \leqslant 2\lambda_1^{-\frac{1}{2}} N$ — это возможно, если N достаточно велико, — и рассмотрим интеграл

$$\frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{(\rho<N_1) \cap (g(\eta) > N^2)} \hat{K}(\eta) e^{-i(\zeta, \eta)} \, d\eta =$$

$$= \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\rho=1} \hat{f}(\theta) \, d\sigma \int\limits_{\omega(\theta, N)}^{N_1} e^{-i(\zeta, \eta)} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Заменив η на $N_1\eta$, приведем последний интеграл к виду

$$\frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\rho=1} \hat{f}(\theta) \, d\sigma \int\limits_{\frac{\omega(\theta, N)}{N_1}}^{1} e^{-iN_1(\zeta, \eta)} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Выделяя малый угол около векторов, ортогональных к ζ, и применяя к оставшейся части ограниченной области

$$\frac{\omega(\theta, N)}{N_1} < \rho < 1$$

теорему Римана, найдем, что при $N \to \infty$ последний интеграл стремится к нулю и, следовательно,

$$\left| \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{(\rho < N_1) \cap (g(\eta) > N^2)} \hat{K}(\eta) e^{-i(\zeta, \eta)} d\eta \right| < \frac{\delta}{2} \tag{11}$$

при N достаточно большом. Из неравенств (10) и (11) вытекает, что при достаточно больших N

$$\left| \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{g(\eta) > N^2} \hat{K}(\eta) e^{-i(\zeta, \eta)} d\eta \right| < \delta.$$

Отсюда

$$\lim_{N \to \infty} \frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{g(\eta) > N^2} \hat{K}(\eta) e^{-i(\zeta, \eta)} d\eta = 0,$$

и ясно, что второй предел в (7) равен

$$\frac{J}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\rho > 1} \hat{K}(\eta) e^{-i(\zeta, \eta)} d\eta. \tag{12}$$

Из формул (6), (7) и (12) следует, что $\hat{\Phi}(\zeta) = \Phi(x)$. Но $\zeta = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A}\xi = \mathfrak{A}^*x$, и окончательно

$$\hat{\Phi}(\zeta) = \Phi\left((\mathfrak{A}^*)^{-1}\zeta\right). \tag{13}$$

Формула (13) и решает задачу о преобразовании символа сингулярного оператора при замене переменных. Если матрица $\mathfrak{A}$ ортогональная, то $(\mathfrak{A}^*)^{-1} = \mathfrak{A}$, и $\hat{\Phi}(\zeta) = \Phi(\mathfrak{A}\zeta)$. Таким образом, если в сингулярном интеграле произведено ортогональное преобразование координат, то тому же преобразованию подвергаются и независимые переменные в символе.

Из формулы (13), между прочим, вытекает, что *множество значений символа инвариантно при замене переменных*. Для случая $m = 2$ это предложение другим способом и ранее было доказано И. А. Ицковичем [1].

§ 22. О дифференцируемости символа

В последующем, при решении сингулярных интегральных уравнений, нам часто будет встречаться необходимость судить о дифференциальных свойствах символа по соответствующим свойствам характеристики. В настоящем параграфе мы приведем некоторые простые факты, достаточные для многих приложений; более полные и точные результаты будут даны в § 32.

Теорема 1.22. *Если характеристика сингулярного интеграла k раз непрерывно дифференцируема по декартовым координатам точки* θ, *то символ этого интеграла имеет на сфере S непрерывные производные порядка $\leqslant k$ по угловым координатам.*

В силу формулы (12) § 20, символ $\Phi(x, \theta)$ выражается через соответствующую характеристику $f(x, \theta)$ по формуле

$$\Phi(x, \theta) = \int\limits_S \left[\ln \frac{1}{|\cos\gamma|} - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma\right] f(x, \theta^*)\,dS^*. \qquad (1)$$

При фиксированном полюсе x характеристика $f(x, \theta^*)$ есть функция точки θ^* на единичной сфере S. Как об этом было сказано в п. 7° § 5, характеристику можно считать продолженной на все пространство E_m, кроме начала координат и бесконечности; при этом, в силу условия теоремы, всюду, кроме начала координат и бесконечности, характеристика k раз непрерывно дифференцируема по декартовым координатам точки θ^*. Пусть θ^* — произвольная точка пространства E_m и пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ — декартовы координаты этой точки. Будем рассматривать характеристику как функцию от $x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ и в соответствии с этим записывать ее в виде $f(x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$.

Введем новую систему декартовых координат $\bar\xi_1, \bar\xi_2, \ldots, \bar\xi_m$. Новое начало совместим со старым, ось $O\bar\xi_1$ направим по лучу $O\theta$, ось $O\bar\xi_2$ расположим в двумерной плоскости, образованной осями $O\bar\xi_1$ и Ox_1. Ось $O\bar\xi_3$ направим ортогонально к осям $O\bar\xi_1, O\bar\xi_2, Ox_2, Ox_3, \ldots, Ox_{m-2}$, ось $O\bar\xi_4$ — ортогонально к осям $O\bar\xi_1, O\bar\xi_2, O\bar\xi_3, Ox_3, \ldots, Ox_{m-3}$ и т. д.

Таблица направляющих косинусов принимает следующий вид:

Таблица направляющих косинусов

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m
$\bar\xi_1$	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	$\ldots$	$\alpha_{1,\,m-3}$	$\alpha_{1,\,m-2}$	$\alpha_{1,\,m-1}$	α_{1m}
$\bar\xi_2$	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}	$\ldots$	$\alpha_{2,\,m-3}$	$\alpha_{2,\,m-2}$	$\alpha_{2,\,m-1}$	α_{2m}
$\bar\xi_3$	0	0	0	0	$\ldots$	0	0	$\alpha_{3,\,m-1}$	α_{3m}
$\bar\xi_4$	0	0	0	0	$\ldots$	0	$\alpha_{4,\,m-2}$	$\alpha_{4,\,m-1}$	α_{4m}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\bar\xi_{m-2}$	0	0	0	$\alpha_{m-2,4}$	$\ldots$	$\alpha_{m-2,m-3}$	$\alpha_{m-2,m-2}$	$\alpha_{m-2,m-1}$	$\alpha_{m-2,\,m}$
$\bar\xi_{m-1}$	0	0	$\alpha_{m-1,3}$	$\alpha_{m-1,4}$	$\ldots$	$\alpha_{m-1,m-3}$	$\alpha_{m-1,m-2}$	$\alpha_{m-1,m-1}$	$\alpha_{m-1,\,m}$
$\bar\xi_m$	0	α_{m2}	α_{m3}	α_{m4}	$\ldots$	$\alpha_{m,\,m-3}$	$\alpha_{m,\,m-2}$	$\alpha_{m,\,m-1}$	α_{mm}

Отличные от нуля направляющие косинусы определяются следующими формулами, в которых ϑ_j означают угловые координаты точки θ:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \cos\vartheta_1,\\
\alpha_{12} &= \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{1,\,m-1} &= \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1},\\
\alpha_{1m} &= \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1},\\
\alpha_{21} &= \sin\vartheta_1,\\
\alpha_{22} &= -\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{2,\,m-1} &= -\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1},\\
\alpha_{2m} &= -\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}.
\end{aligned}$$

Далее, если $k+2<l\leqslant m-1$, то

$$\alpha_{m-k,\,l} = -\cos\vartheta_{k+2}\sin\vartheta_{k+3}\ldots\sin\vartheta_{l-1}\sin\vartheta_l;$$

при $l=k+2$ имеем $\alpha_{m-k,\,k+2}=\sin\vartheta_{k+2}$. Если $k<m-2$, то $\alpha_{m-k,\,m}=-\cos\vartheta_{k+2}\sin\vartheta_{k+3}\ldots\sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}$ и, наконец, $\alpha_{m-2,\,m}=-\cos\vartheta_{m-1}$. Существенно то, что α_{kj} *имеют*

непрерывные производные всех порядков по угловым координатам точки θ.

Формулы преобразования координат имеют вид

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}\bar{\xi}_j.$$

Выполним это преобразование в интеграле (1). Замечая, что $\gamma = \vartheta_1^*$, получим

$$\Phi(x, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta_{m-1}^* \int_0^{\pi} \sin\vartheta_{m-2}^* d\vartheta_{m-2}^* \dots \int_0^{\pi} \sin^{m-3}\vartheta_2^* \, d\vartheta_2^* \times$$
$$\times \int_0^{\pi} f(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \sin^{m-2}\vartheta_1^* \times$$
$$\times \left(\ln\frac{1}{|\cos\vartheta_1^*|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\vartheta_1^*\right) d\vartheta_1^*.$$

Отсюда сразу вытекает существование нужных производных символа. Например, имея в виду, что

$$\frac{\partial f}{\partial\vartheta_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial\vartheta_j} = \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial\xi_k}\frac{\partial\alpha_{kl}}{\partial\vartheta_j}\bar{\xi}_l,$$

найдем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_j} = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta_{m-1}^* \int_0^{\pi} \sin\vartheta_{m-2}^* \, d\vartheta_{m-2}^* \dots \int_0^{\pi} \sin^{m-3}\vartheta_2^* \, d\vartheta_2^* \times$$
$$\times \int_0^{\pi} \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial\xi_k}\frac{\partial\alpha_{kl}}{\partial\vartheta_j}\bar{\xi}_l \sin^{m-2}\vartheta_1^* \times$$
$$\times \left(\ln\frac{1}{|\cos\vartheta_1^*|} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\vartheta_1^*\right) d\vartheta_1^*;$$

аналогично вычисляются и высшие производные от $\Phi(x, \theta)$.

§ 23. Условие непрерывности символа[1])

Теорема 1.23. *Если при данном x характеристика $f(x, \theta)$ сингулярного интеграла удовлетворяет условию*

$$\int_S |f(x, \theta)|^2 dS < \infty, \tag{1}$$

то символ этого интеграла при том же x непрерывен на сфере S.

Характеристику разложим в ряд по сферическим функциям

$$f(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n, m}(\theta), \tag{2}$$

сходящийся в среднем на сфере S; мы не подчеркиваем зависимости членов разложения (2) от x. Символ определяется рядом

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n, m} Y_{n, m}(\theta), \qquad \gamma_{n, m} = \frac{i^n \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}. \tag{3}$$

Докажем, что ряд (3) сходится на S равномерно.

Прежде всего с помощью формулы Стирлинга легко получаем, что $|\gamma_{n, m}| \leqslant C_1 n^{-\frac{m}{2}}$, $C_1 = \mathrm{const}$. Воспользуемся далее формулой IX § 14

$$Y_{n, m}(\theta) = \frac{2n+m-2}{4\pi^{\frac{m-1}{2}}} \int_S Y_{n, m}(\theta^*) I^{(n)}(p, \cos\omega)\, dS,$$

где $\cos\omega$ определен формулой XI § 14. Известно[2]), что в зависимости от четности или нечетности m формулу IX § 14 можно писать по-разному. Именно, если $m = 2\nu + 2$, то

$$Y_{n, m}(\theta) = \frac{2}{(2\pi)^{\nu}} \int_S Y_{n, m}(\theta^*) \frac{d^{\nu} \cos(n+\nu)\omega}{(d\cos\omega)^{\nu}}, \tag{4}$$

---

[1]) См. статью автора [11].

[2]) См., например, Э. Гейне [1] или Ф. Мелер [1].

если же $m = 2\nu + 3$, то

$$Y_{n,m}(\theta) = \frac{n+\nu+\frac{1}{2}}{(2\pi)^{\nu+1}} \int\limits_S Y_{n,m}(\theta^*) \frac{d^\nu P_{n+\nu}(\cos\omega)}{(d\cos\omega)^\nu} dS; \qquad (5)$$

здесь P_k — полином Лежандра k-го порядка. Обозначим

$$\|Y_{n,m}\|^2 = \int\limits_S |Y_{n,m}(\theta)|^2 dS.$$

Ряд (2) сходится в среднем и, так как он ортогональный, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Y_{n,m}\|^2$$

сходится. Оценим $|Y_{n,m}(\theta)|$. По неравенству Буняковского имеем при $m = 2\nu + 2$

$$|Y_{n,m}(\theta)| \leqslant \frac{2}{(2\pi)^\nu} \|Y_{n,m}\| \left\{ \int\limits_S \left[\frac{d^\nu \cos(n+\nu)\omega}{(d\cos\omega)^\nu} \right]^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим последний интеграл. Заметим, что $\cos\omega = \theta \cdot \theta^*$ и что выражение

$$\frac{d^\nu \cos(n+\nu)\omega}{(d\cos\omega)^\nu} = T_{n+\nu}^{(\nu)}(\cos\omega)$$

есть m-мерная сферическая функция порядка n относительно точки θ. Возьмем точку $\theta_1 \in S$ и положим $\cos\omega_1 = \theta_1 \cdot \theta^*$. По формуле (4)

$$T_{n+\nu}^{(\nu)}(\cos\theta_1 \cdot \theta) = \frac{2}{(2\pi)^\nu} \int\limits_S T_{n+\nu}^{(\nu)}(\cos\omega_1)\, T_{n+\nu}^{(\nu)}(\cos\omega)\, dS,$$

что при $\theta_1 = \theta$ дает

$$\int\limits_S [T_{n+\nu}^{(\nu)}(\cos\omega)]^2 dS = \frac{(2\pi)^\nu}{2} T_{n+\nu}^{(\nu)}(1).$$

Из известной теоремы А. А. Маркова об оценке производных полинома следует, что $T_{n+\nu}^{(\nu)}(1) = O(n^{2\nu})$. Отсюда

$$\int\limits_S \left[\frac{d^\nu \cos(n+\nu)\omega}{(d\cos\omega)^\nu} \right]^2 dS \leqslant C_2 n^{2\nu} = C_2 n^{m-2}, \quad C_2 = \text{const},$$

и, следовательно,

$$|Y_{n,m}(\theta)| \leqslant C\|Y_{n,m}\| n^{\frac{m}{2}-1}. \tag{6}$$

Если $m = 2\nu + 3$, то

$$|Y_{n,m}(\theta)| \leqslant \frac{n+\nu+\frac{1}{2}}{(2\pi)^{\nu+1}} \|Y_{n,m}\| \left\{ \int\limits_S \left[\frac{d^\nu P_{n+\nu}(\cos\omega)}{(d\cos\omega)^\nu} \right]^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}};$$

в данном случае

$$dS = \sin^{2\nu+1}\vartheta_1^* \, d\vartheta_1^* \, d\sigma,$$

где $d\sigma$ есть элемент поверхности единичной сферы в пространстве $m-1$ измерений; заметим, что поверхность этой сферы равна $\dfrac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}$.

Поместим северный полюс в точке θ. Тогда $\omega = \vartheta_1^*$,

$$\int\limits_S \left[\frac{d^\nu P_{n+\nu}(\cos\omega)}{(d\cos\omega)^\nu} \right]^2 dS = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} \left[P_n^{(\nu)}(z)\right]^2 dz =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+\nu)!}{(n-\nu)!},$$

и мы опять приходим к оценке (6), которая, следовательно, верна для любого n.

Теперь общий член ряда (3) имеет оценку

$$C' \frac{\|Y_{n,m}\|}{n} \leqslant \frac{C'}{2}\left(\|Y_{n,m}\|^2 + \frac{1}{n^2}\right), \quad C' = \text{const},$$

из которой вытекает, что указанный ряд сходится равномерно и, следовательно, его сумма непрерывна.

ГЛАВА V

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

§ 24. Простейшие следствия из преобразования Фурье. Первая теорема об ограниченности в L_2

В настоящем параграфе мы будем изучать простейшие сингулярные операторы, в которых интеграл распространен по евклидову пространству E_m, а символ не зависит от полюса. Такие операторы имеют вид

$$Au = au(x) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)\, dy. \tag{1}$$

Будем рассматривать A как оператор в пространстве $L_2(E_m)$. Формула (14) § 20 показывает, что оператор A унитарно эквивалентен оператору умножения на его символ $\Phi_A(\theta)$. Отсюда сразу вытекает

Теорема 1.24. *Если символ сингулярного оператора не зависит от полюса и ограничен, то сингулярный оператор ограничен в $L_2(E_m)$; при этом*

$$\|A\| = \operatorname{vrai\,max} |\Phi_A(\theta)|. \tag{2}$$

Теорема 1.24 была доказана автором в заметке [7], но из других соображений. В статье А. Кальдерона и А. Зигмунда [1] дано достаточное условие ограниченности символа; оно состоит в том, что

$$\int_S |f(\theta)| \ln^+ |f(\theta)|\, dS < \infty. \tag{3}$$

Теорема 1.24 позволяет расширить оператор (1) по непрерывности на все пространство $L_2(E_m)$, если он был предварительно определен на плотном множестве. Если характеристика $f(\theta)$ удовлетворяет условию (3), то оператор (1) очевидным образом определен на плотном в $L_2(E_m)$ множестве финитных и непрерывно дифференцируемых функций, которые упомянутый оператор переводит в функции, убывающие на бесконечности как $O(|x|^{-m})$ и потому принадлежащие $L_2(E_m)$.

Формула (14) § 20 позволяет существенно расширить понятие сингулярного оператора. Именно, пусть $\Phi(x)=\Phi(\theta)$ произвольная измеримая функция, постоянная на каждом луче, проходящем через начало координат. Сингулярным оператором с символом $\Phi(\theta)$ назовем оператор

$$Au=F^{-1}\Phi Fu, \tag{4}$$

где F — преобразование Фурье.

При таком определении по-прежнему сумме и произведению операторов соответствуют сумма (что очевидно) и произведение символов; действительно, если $A_1=F^{-1}\Phi_1 F$, $A_2=F^{-1}\Phi_2 F$, то

$$A_1A_2=F^{-1}\Phi_1 FF^{-1}\Phi_2 F=F^{-1}\Phi_1\Phi_2 F.$$

Остаются верными также теорема 1.24 и формула (2). Из формулы (4) вытекают приводимые ниже теоремы, верные для сингулярных операторов с символами, не зависящими от полюса.

Теорема 2.24. *Сингулярный оператор является самосопряженным, если его символ вещественен, и унитарным, если модуль его символа равен единице.*

Теорема 3.24. *Спектр сингулярного оператора совпадает с множеством чисел, обладающих следующим свойством: на некотором множестве точек единичной сферы S, имеющем положительную меру, символ принимает значения, сколь угодно близкие к данному числу. Такое число есть собственное число бесконечной кратности, если символ принимает значение, равное этому числу, на множестве положительной меры, и точка непрерывного спектра[1]), если символ принимает соответствующее значение на множестве меры нуль.*

---

[1]) Мы пользуемся классификацией М. Стоуна [1], воспроизведенной также в книге автора [16].

Теорема 4.24. *Сингулярные операторы, символы которых не зависят от полюса, перестановочны между собой.*

Пусть угловые координаты точки θ суть $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ $\ldots, \vartheta_{m-2}, \vartheta_{m-1}$, причем $0 \leqslant \vartheta_j \leqslant \pi$, $j \leqslant m-2$, $-\pi \leqslant$ $\leqslant \vartheta_{m-1} \leqslant \pi$. Введем в рассмотрение сингулярные операторы H_j, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, символы которых равны $e^{i\vartheta_j}$. Из теорем 2.24—4.24 вытекает, что операторы H_j унитарны в $L_2(E_m)$, имеют чисто непрерывный спектр, который заполняет всю окружность $|\lambda| = 1$ на плоскости параметра λ, если $j = m-1$, и полуокружность $|\lambda| = 1$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, если $j \leqslant$ $\leqslant m-2$. Наконец, операторы H_j перестановочны между собой. Обозначим через $\mathfrak{E}_j(\vartheta)$ спектральную функцию оператора H_j, так что

$$H_j = \int_0^\pi e^{i\vartheta}\, d\mathfrak{E}_j(\vartheta), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m-2,$$

$$H_{m-1} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\vartheta}\, d\mathfrak{E}_{m-1}(\vartheta).$$

Введем еще в рассмотрение перестановочные между собой унитарные операторы h_j умножения на функции $e^{i\vartheta_j}$, $1 \leqslant$ $\leqslant j \leqslant m-1$, и их спектральные функции $\mathfrak{E}'_j(\vartheta)$. Символ $\Phi(\vartheta)$ есть однозначная функция от $e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2}, \ldots, e^{i\vartheta_{m-2}}, e^{i\vartheta_{m-1}}$:

$$\Phi(\theta) = \Phi\left(e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2}, \ldots, e^{i\vartheta_{m-2}}, e^{i\vartheta_{m-1}}\right);$$

отсюда видно, что оператор умножения на $\Phi(\theta)$ есть функция операторов h_j, равная $\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_{m-1})$. Но тогда имеет место спектральное разложение [1])

$$\Phi(\theta)u = \int_\Pi \Phi\left(e^{i\vartheta_1^*}, e^{i\vartheta_2^*}, \ldots, e^{i\vartheta_{m-2}^*}, e^{i\vartheta_{m-1}^*}\right) d\mathfrak{E}'(\theta^*)\, u =$$

$$= \int_\Pi \Phi(\theta^*)\, d\mathfrak{E}'(\theta^*)\, u,$$

[1]) См. А. И. Плеснер и В. А. Рохлин [1].

где Π — параллелепипед $0 \leqslant \vartheta_j^* \leqslant \pi$, $j \leqslant m-2$, $-\pi \leqslant \leqslant \vartheta_{m-1} \leqslant \pi$ и

$$d\mathfrak{E}'(\theta^*) = \prod_{j=1}^{m-1} d\mathfrak{E}_j'(\vartheta_j^*).$$

В силу формулы (4) $d\mathfrak{E}_j(\vartheta_j) = F^{-1}\, d\mathfrak{E}_j'(\vartheta_j)\, F$ и, следовательно,

$$Au = \int_{\Pi} \Phi(\theta)\, d\mathfrak{E}(\theta)\, u, \tag{5}$$

где

$$d\mathfrak{E}(\theta) = \prod_{j=1}^{m-1} d\mathfrak{E}_j(\vartheta_j). \tag{6}$$

Формула (5) дает новое представление сингулярного оператора через его символ; исходя из этого представления, нетрудно опять получить теоремы настоящего параграфа.

§ 25. Символ, зависящий от полюса. Вторая теорема об ограниченности в L_2

Рассмотрим теперь сингулярный оператор, символ которого зависит от полюса. Начнем с простейшего случая, когда символ представляет собой полином по сферическим функциям ($Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$ — линейно независимые сферические функции порядка n)

$$\Phi(x, \theta) = \sum a_n^{(k)}(x)\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta).$$

Тогда по формуле (5) § 24 данный сингулярный оператор можно представить в виде

$$Au = \sum a_n^{(k)}(x) \int_{\Pi} Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\, d\mathfrak{E}(\theta)\, u.$$

Внося коэффициенты под знак интеграла и меняя порядок суммирования и интегрирования, что допустимо, так как сумма конечна, получаем

$$Au = \int_{\Pi} \Phi(x, \theta)\, d\mathfrak{E}(\theta)\, u. \tag{1}$$

Формулу (1) можно обосновать и для значительно более широкого класса символов. Мы не станем этим заниматься: *формулу* (1) *мы примем за определение сингулярного оператора*, символ которого зависит от полюса; такой оператор задан в $L_2(E_m)$ на множестве функций, которые интегралом (1) переводятся в функции того же пространства $L_2(E_m)$.

Следующая теорема дает достаточное условие ограниченности в $L_2(E_m)$ сингулярного оператора, символ которого зависит от полюса.

Теорема 1.25. *Если символ $\Phi(x, \theta)$ и его производные*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta_1\,\partial\vartheta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-2}\Phi}{\partial\vartheta_2\,\partial\vartheta_3\ldots\partial\vartheta_{m-1}} \tag{2}$$

измеримы по совокупности точек x и θ, непрерывны при фиксированном x и ограничены независимо от x, а производная

$$\frac{\partial^{m-1}\Phi}{\partial\vartheta_1\,\partial\vartheta_2\ldots\partial\vartheta_{m-2}\,\partial\vartheta_{m-1}} \tag{3}$$

существует как обобщенная по С. Л. Соболеву [1] *и удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^\pi\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi\left|\frac{\partial^{m-1}\Phi}{\partial\vartheta_1\,\partial\vartheta_2\ldots\partial\vartheta_{m-2}\,\partial\vartheta_{m-1}}\right|^2 d\vartheta_1\,d\vartheta_2\ldots$$
$$\ldots d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1}\leqslant C=\mathrm{const}, \tag{4}$$

то сингулярный оператор ограничен в $L_2(E_m)$.

Интеграл (1) возьмем по частям. Пользуясь тем, что $\mathscr{E}_1(0)=0$, $\mathscr{E}_1(\pi)=I$, найдем

$$Au=-\int_0^\pi\int_0^\pi\ldots\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_1}\,\mathscr{E}_1(\vartheta_1)\,d\vartheta_1\prod_{j=2}^{m-1}d\mathscr{E}_j(\vartheta_j)\,u+$$
$$+\int_0^\pi\ldots\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi\Phi\prod_{j=2}^{m-1}d\mathscr{E}_j(\vartheta_j)\,u.$$

Продолжая интегрировать по частям, мы в конечном счете приведем Au к виду

$$Au = \sum_{k=0}^{m-1} \pm \int \ldots \int \frac{\partial^k \Phi}{\partial \vartheta_{i_1} \ldots \partial \vartheta_{i_k}} \prod_{r=1}^{k} \mathscr{E}_{i_r}(\vartheta_{i_r})\, u\, d\vartheta_{i_1} \ldots d\vartheta_{i_k}. \tag{5}$$

Под интегралом содержатся только производные вида (2) или (3), производная порядка k содержится под интегралом k-й кратности. Оценим отдельное слагаемое в сумме (5). Обозначая его через Bu, имеем в силу условий теоремы

$$|Bu|^2 \leqslant C'^2 \int \ldots \int \left| \prod_{r=1}^{k} \mathscr{E}_{i_r}(\vartheta_{i_r})\, u \right|^2 d\vartheta_{i_1} \ldots d\vartheta_{i_k}, \tag{6}$$

$$C' = \text{const}.$$

Интегрируя это по E_m и пользуясь тем, что $\|\mathscr{E}_j\| = 1$, найдем: $\|Bu\| \leqslant C'' \|u\|$, $C'' = \text{const}$, и, следовательно, $\|A\| \leqslant NC''$, где N — число слагаемых в сумме (5). Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательство теоремы 1.25 основано на возможности интегрирования по частям и на оценке (6). Поэтому верна

Теорема 2.25. *Сингулярный оператор* (1) *ограничен в $L_2(E_m)$, если его символ имеет всевозможные обобщенные производные порядка $m-1$ по $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$, и интегралы от квадратов их модулей, распространенные по параллелепипеду* Π, *ограничены независимо от x.*

Замечание 2. Условия теорем 1.25 и 2.25 далеки от необходимых. Так, сингулярный оператор ограничен в $L_2(E_m)$, если его символ $\Phi(x, \theta)$ можно разложить в ряд

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, \Phi_n(\theta),$$

такой, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \in E_m} |a_n(x)| \cdot \max_{\theta \in S} |\Phi_n(\theta)|;$$

норма оператора (1) не превосходит суммы последнего ряда. Можно указать и другие достаточные признаки ограниченности сингулярного оператора, также не требующие предположений о дифференцируемости символа.

Теоремы об ограниченности сингулярного оператора, доказанные в настоящем и предшествующем параграфах, остаются верными и тогда, когда сингулярный интеграл распространен по измеримому множеству $D \subset E_m$ и пространство $L_2(E_m)$ заменяется на $L_2(D)$. Действительно, пусть

$$Au = a(x)\,u(x) + \int_D \frac{f(x,\theta)}{r^m}\,u(y)\,dy \tag{7}$$

и пусть символ оператора A удовлетворяет условиям какой-либо из упомянутых теорем. Доопределим функции $a(x)$, $u(x)$, $f(x, \theta)$, положив их тождественно равными нулю при $x \bar{\in} D$. Условия теоремы об ограниченности при этом не нарушаются, и если $u(x) \in L_2(D)$, то после доопределения $u(x) \in L_2(E_m)$. Теперь $\|Au\|_{L_2(E_m)} \leqslant C\,\|u\|_{L_2(E_m)}$, или

$$\int_{E_m} |Au|^2\,dx \leqslant C^2 \int_{E_m} |u|^2\,dx = C^2 \int_D |u|^2\,dx.$$

Тем более

$$\int_D |Au|^2\,dx \leqslant C^2 \int_D |u|^2\,dx,$$

что и требовалось доказать. Аналогичное замечание относится и к теоремам об ограниченности сингулярного оператора в L_p (см. ниже, § 26).

Замечание 3. Условия теорем § 24 и § 25 не совпадают, и возникает вопрос, не являются ли более жесткие условия настоящего параграфа излишними? Мы приведем здесь пример, который, по-видимому, показывает, что это не так: если некоторый оператор определен спектральным представлением вида (1), в котором множитель $\Phi(x, \theta)$ зависит от x и ограничен, то оператор может быть и неограниченным.

В пространстве $L_2(0, \pi)$ рассмотрим самосопряженный оператор, спектр которого состоит из собственных чисел $\theta_k = k^{-2}$, каждому из которых, в свою очередь, соответствует одна нормированная собственная функция

$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$. Этому оператору соответствует спектральная функция

$$d\mathscr{E}(\theta)u = \begin{cases} 0, & \theta \neq k^{-2}, \\ (u, \varphi_k)\varphi_k(x), & \theta = k^{-2}. \end{cases}$$

Составим оператор

$$Au = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \theta)\, d\mathscr{E}(\theta)\, u = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(x, \theta_k)(u, \varphi_k)\varphi_k(x).$$

Функцию $\Phi(x, \theta)$ достаточно задать только на спектре; положим

$$\Phi(x, \theta_k) = \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx.$$

Очевидно, при таком выборе эта функция на спектре ограничена. В то же время

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)\varphi_k^2(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k) \sin^2 kx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k) \cos 2kx.$$

Второй ряд справа—ортогональный и представляет собой некоторый ограниченный в пространстве $L_2(0, \pi)$ оператор. Что же касается первого ряда, то в области определения оператора A можно найти нормированные элементы со сколь угодно большой суммой коэффициентов Фурье. Отсюда следует, что оператор A неограничен.

§ 26. Об ограниченности сингулярного интегрального оператора в L_p

Доказательство основной теоремы настоящего параграфа основано на теореме А. П. Кальдерона и А. Зигмунда [4], приведенной в § 1 под индексом 2.1. Ниже мы излагаем, в основных чертах, доказательство теоремы 2.1; в изложении мы в существенном следуем упомянутой статье [4].

Сингулярное ядро $K(x, y)$ запишем в виде $K(x, y) = K(x, x-(x-y)) = N(x, x-y)$ и рассмотрим сперва случай, когда функция $N(x, z)$ нечетная относительно z. В силу условия теоремы 2.1,

$$\int_S |f(x, \theta)|^{p'} dS \leqslant C = \text{const}; \; f(x, \theta) = r^m K(x, y). \tag{1}$$

Положим $\bar{u}(x) = \sup\limits_{\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon(x)|$, где

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \int\limits_{r>\varepsilon} K(x, y) u(y) dy. \tag{2}$$

Пусть $u(x) \in L_p(E_m)$. Докажем, что: а) оператор, переводящий функцию u в функцию $\bar{u}$, ограничен в $L_p(E_m)$; б) почти всюду в E_m существует предел $\tilde{u}(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tilde{u}_\varepsilon(x)$; в) оператор, переводящий функцию u в функцию $\tilde{u}$, ограничен в $L_p(E_m)$.

Пусть t — вещественная переменная и $g(t) \in L_p(-\infty, \infty)$. Рассмотрим интегральный оператор

$$\tilde{g}_\varepsilon(s) = \int\limits_{|s-t| > \varepsilon(s)} \frac{g(t)}{s-t} dt, \tag{3}$$

где функция $\varepsilon(s)$ ограничена и измерима, а в остальном произвольна. Как доказано Кальдероном и Зигмундом ([1], гл. II, теорема 1), норма этого оператора ограничена в $L_p(-\infty, \infty)$ постоянной, которая не зависит от вида функции $\varepsilon(s)$. Пользуясь тем, что эта функция произвольна, и опираясь на лемму Фату (Ф. Рис и Б. С. Надь [1], стр. 48), можно доказать, что

$$\|\bar{g}_\varepsilon\| \leqslant A \|g\|; \quad \bar{g}(s) = \sup_\varepsilon |\tilde{g}_\varepsilon(s)|, \quad A = \text{const}. \tag{4}$$

Пусть теперь $u(x) \in L_p(E_m)$, и пусть y' — произвольный единичный вектор. Положим

$$\tilde{u}_\varepsilon(x, y') = \int\limits_{|t| > \varepsilon} u(x - ty') \frac{dt}{t}, \tag{5}$$

$$\bar{u}(x, y') = \sup_\varepsilon |\tilde{u}_\varepsilon(u, y')|. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что обе функции $\tilde{u}_\varepsilon(x, y')$ и $\bar{u}(x, y)$ измеримы.

Будем считать, что конец вектора x может перемещаться по прямой, параллельной вектору y', так что $x = sy' + x_0$, $x_0 = \text{const}$. Тогда интеграл (5) есть частный случай интеграла (3) при $g(t) = u(ty' + x_0)$, и мы получаем, в силу неравенства (4),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{u}(x - ty')]^p \, dt \leqslant A^p \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x - ty')|^p \, dt;$$

интегрируя это по пространству прямых, параллельных вектору y', получаем

$$\int_{E_m} |\bar{u}(x, y')|^p \, dx \leqslant A^p \int_{E_m} |u(x)|^p \, dx. \tag{7}$$

Положим теперь

$$u_0(x) = \frac{1}{2} \int_S \bar{u}(x, y') |N(x, y')| \, dy', \tag{8}$$

$$\hat{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \int_S \tilde{u}_\varepsilon(x, y') N(x, y') \, dy'. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что $\hat{u}_\varepsilon(x) = \tilde{u}_\varepsilon(x)$, где $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ определено формулой (2); в этом можно убедиться, если в формуле (9) заменить выражение $\tilde{u}_\varepsilon(x, y')$ по формуле (5), что приведет к интегралу, совпадающему с интегралом (2), преобразованным к сферическим координатам с полюсом x. Теперь, в силу формулы (6), $|\tilde{u}_\varepsilon(x)| \leqslant u_0(x)$.

Далее,

$$\int_{E_m} [u_0(x)]^p \, dx = 2^{-p} \int_{E_m} \left[\int_S \bar{u}(x, y') |N(x, y')| \, dy' \right]^p dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-p} \int_{E_m} dx \int_S [u(x, y')]^p \, dy' \left[\int_S |N(x, y')|^{p'} \, dy' \right]^{\frac{p}{p'}}.$$

Внутренний интеграл совпадает с интегралом (1), поэтому

$$\int_{E_m} [u_0(x)]^p \, dx \leqslant 2^{-p} C \int_S dy' \int_{E_m} [\bar{u}(x, y')]^p \, dy'$$

и, по неравенству (7),

$$\|u_0\| \leqslant \frac{1}{2} C^{\frac{1}{p'}} A \omega_m^{\frac{1}{p}} \|u\| = A_1 \|u\|, \tag{10}$$

где ω_m есть поверхность сферы S. Таким образом, $u_0(x) \in L_p(E_m)$. Очевидно также, что $\tilde{u}_\varepsilon(x) \in L_p(E_m)$ и что норма $\|\tilde{u}_\varepsilon\|$ удовлетворяет тому же неравенству (10). Теперь можно доказать, что $\bar{u}(x) \in L_p(E_m)$ и что норма $\|\bar{u}\|$ удовлетворяет неравенству (10).

Докажем теперь, что при $\varepsilon \to 0$ функция $\tilde{u}_\varepsilon(x)$ сходится к некоторому пределу как почти всюду E_m, так и по норме пространства $L_p(E_m)$.

Пусть $\rho(t)$ — четная непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $\rho(0) = 1$ и $\rho(t) = 0$, если $|t| \geqslant 1$. Так как сингулярный одномерный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(t)}{t} \, dt$$

существует, то интеграл

$$\int_{|t| > \varepsilon} \frac{\rho(t)}{t} \, dt$$

стремится к некоторому конечному пределу при $\varepsilon \to 0$. Переходя к сферическим координатам, можно доказать, что при $\varepsilon \to 0$ стремится к конечному пределу и интеграл

$$\int_{r > \varepsilon} K(x, y) \rho(r) \, dy.$$

Пусть функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема и финитна, т. е. обращается в нуль вне некоторой сферы. Тогда

$$\tilde{u}_\varepsilon(x) = \int_{r > \varepsilon} K(x, y) [u(y) - u(x) \rho(r)] \, dy + \\ + u(x) \int_{r > \varepsilon} K(x, y) \rho(r) \, dy.$$

Так как $\rho(0)=1$, то подынтегральная функция в первом интеграле абсолютно интегрируема по всему пространству E_m, и ясно, что всюду в E_m существует $\tilde{u}(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{u}_\varepsilon(x)$.

В общем случае, когда $u\in L_p(E_m)$, можно положить $u=v+w$, где v непрерывно дифференцируема и финитна, а норма $\|w\|$ сколь угодно мала. Имеем $\tilde{u}_\varepsilon(x)=\tilde{v}_\varepsilon(x)+\tilde{w}_\varepsilon(x)$, причем $|\tilde{w}_\varepsilon(x)|\leqslant\bar{w}(x)$. Предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{v}_\varepsilon(x)$ существует, поэтому

$$\overline{\lim}\,\tilde{u}_\varepsilon(x)-\underline{\lim}\,\tilde{u}_\varepsilon(x)\leqslant 2\bar{w}(x);$$

так как норма $\|\bar{w}\|\leqslant A_1\|w\|$ сколь угодно мала, то из последнего неравенства вытекает, что предел

$$\tilde{u}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{u}_\varepsilon(x)$$

существует почти всюду в E_m. Выше было отмечено, что $|\tilde{u}_\varepsilon(x)|\leqslant u_0(x)$ и что $u_0\in L_p(E_m)$. Отсюда следует, что

$$\|\tilde{u}\|\leqslant\|u_0\|\leqslant A_1\|u\|.$$

Этим завершено доказательство теоремы 2.1 для случая нечетной функции $N(x, z)$.

Коротко наметим доказательство теоремы 2.1 в общем случае. Как и выше, представим сингулярное ядро $K(x, y)$ в виде $K(x, y)=N(x, x-y)$ и положим

$$N(x, z)=N_1(x, z)+N_2(x, z),$$

где по отношению к аргументу z ядро N_1 нечетное, а ядро N_2 — четное. Теорему 2.1 достаточно доказать для четного ядра. Введем в рассмотрение так называемое векторное сингулярное ядро М. Риса

$$R(x)=\frac{1}{\pi^{\frac{m+1}{2}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{x}{|x|^{m+1}}. \tag{11}$$

Оно нечетное, поэтому если $u\in L_p(E_m)$ и

$$v(x)=\int_{E_m}R(x-y)\,u(y)\,dy, \tag{12}$$

то $\|v\| \leqslant A_2 \|u\|$, $A_2 = \text{const}$. Докажем, что, в свою очередь,

$$u(x) = -\int_{E_m} R(x-y)\, v(y)\, dy. \tag{13}$$

Для этого выполним преобразование Фурье над обеими частями формулы (12). По формуле (2) § 19 имеем $Fv = (2\pi)^{\frac{m}{2}} FR \cdot Fu$; в силу теоремы 1.20, FR есть символ ядра $(2\pi)^{-\frac{m}{2}} R$. Но характеристика ядра R, равная

$$\frac{1}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \frac{x-y}{r},$$

есть сферическая функция первого порядка, и ее символ получается умножением на $\gamma_{m,1}$ (см. формулу (3) § 13). Теперь

$$(2\pi)^{\frac{m}{2}} FR = \frac{i\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \frac{x}{|x|} = i\frac{x}{|x|}$$

и $Fv = i\frac{x}{|x|} Fu$. Умножая это скалярно на $\frac{x}{|x|}$, находим

$$Fu = -i\frac{x}{|x|} \cdot Fv = -(2\pi)^{\frac{m}{2}} FR \cdot Fv.$$

Обратное преобразование Фурье дает теперь

$$u = -\int_{E_m} R(x-y)\, v(y)\, dy,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что если

$$\tilde{u}(x) = \int_{E_m} N_2(x, x-y)\, u(y)\, dy,$$

то

$$\tilde{u}(x) = \int_{E_m} L(x, x-y)\, v(y)\, dy,$$

где

$$L(x,\ x-y)=\int\limits_{E_m} N_2(x,\ z)\,R(y-z)\,dz.$$

Ядро L нечетное, и можно доказать, что оно удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Но тогда $\|\tilde{u}\|\leqslant A_3\|v\|\leqslant \leqslant A_3A_2\|u\|$, и теорема 2.1 доказана полностью.

В последующей теореме 1.26 мы используем понятие о равномерной принадлежности функции от x и θ к пространству $W_2^{(l)}(S)$, введенное ниже (§ 31, стр. 150), и соответствующую символику, а также теоремы § 32.

Теорема 1.26. *Сингулярный оператор*

$$\int\limits_{\Pi} \Phi(x,\ \theta)\,d\mathfrak{G}(\theta)\,u \tag{14}$$

ограничен в $L_p(E_m)$, *если* [1]) $\Phi(x,\theta)\,\hat{\in}\,W_2^{(l)}(S)$, *где* $l\geqslant\frac{m-1}{p}+1$ *при* $p<2$ *и* $l\geqslant\frac{m+1}{2}$ *при* $p\geqslant 2$ [2]).

Пусть $a(x)$ — свободный член разложения символа $\Phi(x,\ \theta)$ по сферическим функциям, а $f(x,\ \theta)$ — соответствующая характеристика. Из условий теоремы вытекает, что коэффициент $a(x)$ ограничен. Далее, в силу теоремы 2.32 (см. ниже, стр. 155), $f(x,\ \theta)\,\hat{\in}\,W_2^{\left[l-\frac{m}{2}\right]}(S)$. Пусть $p\geqslant 2$. Если $l\geqslant\frac{m+1}{2}$, то $\left[l-\frac{m}{2}\right]\geqslant 0$, $f(x,\ \theta)\in L_2(S)$; тем более $f(x,\ \theta)\,\hat{\in}\,L_{p'}(S)$, и оператор (14) ограничен. Пусть теперь $p<2$. Обозначим $\left[l-\frac{m}{2}\right]=\lambda$. По теореме вложения С. Л. Соболева, для того чтобы $f(x,\ \theta)\,\hat{\in}\,L_{p'}(S)$, достаточно, чтобы $\frac{2(m-1)}{m-1-2\lambda}\geqslant p'$, откуда $\lambda\geqslant(m-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}\right)$. Далее, $l=\frac{m}{2}+\lambda$ при m четном и $l=\frac{m+1}{2}+\lambda$ при m

---

[1]) Смысл обозначений см. § 31.

[2]) Автор считает необходимым указать, что доказательство сформулированной в его заметке [22] теоремы об ограниченности сингулярного оператора в $L_p(E_m)$ неверно.

нечетном, и достаточно, чтобы

$$l \geqslant \frac{m+1}{2}+(m-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}\right)=\frac{m-1}{p}+1.$$

Замечание. В статье [7] А. П. Кальдерона и А. Зигмунда доказана теорема, менее сильная, чем теорема 1.26: сингулярный оператор ограничен в $L_p(E_m)$, где p — любое число из интервала $(1, \infty)$, если символ бесконечно дифференцируем по декартовым координатам точки θ, причем производные символа удовлетворяют по отношению к точке x условию Липшица с положительным показателем. При этом норма сингулярного оператора оценивается через максимум модуля символа и его производных до порядка $2m$ включительно.

§ 27. Интегралы, распространенные по произвольному многообразию

Пусть Γ — замкнутое ляпуновское многообразие. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} \widetilde{K}(\xi, \eta)\, \widetilde{u}(\eta)\, d\eta, \tag{1}$$

ядро которого подчинено условиям п. 5° § 5. Как мы видели, интеграл (1) сводится к сумме двух интегралов, первый из которых имеет слабую особенность, а второй — сингулярный, распространенный по некоторой конечной области евклидова пространства. Первый из упомянутых интегралов определяет оператор, вполне непрерывный в $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$. Отсюда нетрудно заключить, что интегральный оператор (1) ограничен в $L_2(\Gamma)$, соответственно в $L_p(\Gamma)$, если символ этого интеграла удовлетворяет условиям теорем § 24—26.

§ 28. Дифференциальные свойства сингулярных интегралов

1°. Будем говорить, что функция $u(x) \in L_p(E_m)$ имеет слабую (сильную) производную $\frac{\partial u}{\partial x_j} = v_j(x)$, если существует слабый (сильный) предел

$$v_j(x) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta_j u(x)}{\Delta x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j+\Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m) - u(x)}{\Delta x_j}.$$

Сильная производная есть в то же время и слабая; докажем, что слабая производная есть также обобщенная производная в смысле С. Л. Соболева [1].

Пусть $\varphi(x)$ — финитная непрерывно дифференцируемая функция. Тогда

$$\int_{E_m} \varphi \frac{\Delta_j u}{\Delta x_j} dx \xrightarrow[\Delta x_j \to 0]{} \int_{E_m} \varphi v_j dx. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\int_{E_m} \varphi \frac{\Delta_j u}{\Delta x_j} dx =$$

$$= -\int_{E_m} u(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - \Delta x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)}{\Delta x_j} dx \xrightarrow[\Delta x_j \to 0]{}$$

$$\to -\int_{E_m} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx. \tag{2}$$

Сравнение формул (1) и (2) показывает, что $v_j(x)$ совпадает с обобщенной производной в смысле С. Л. Соболева $\frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Очевидно, что для того, чтобы функция имела слабый градиент, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в целом условию Липшица с показателем единица, т. е. чтобы она удовлетворяла условию

$$\| u(x+h) - u(x) \|_{L_p(E_m)} \leqslant A|h|, \quad A = \mathrm{const}.$$

Все сказанное сохраняет силу, если $u(x) \in L_p(\Omega)$, $\Omega \in E_m$, и производная определяется в любой внутренней подобласти Ω.

2°. Рассмотрим сингулярный интеграл

$$v(x, y) = \int_{E_m} K(x-y) u(y) dy; \quad K(x-y) = \frac{f(\theta)}{r^m}, \tag{3}$$

символ которого удовлетворяет условиям § 26, так что оператор (3) ограничен в $L_p(E_m)$. Если $p = 2$, то достаточно предположить, что символ интеграла (3) ограничен (см. § 24).

Имеем

$$\frac{v(x+h)-v(x)}{|h|}=\int_{E_m}\frac{K(x+h-y)-K(x-y)}{|h|}u(y)\,dy=$$

$$=\int_{E_m}K(x-y)\frac{u(y)-u(y-h)}{|h|}\,dy. \tag{4}$$

Пусть C—норма оператора (3). Если $\omega(u, \delta)$ есть модуль непрерывности в целом функции $u(x)$, то, очевидно, $\omega(v, \delta)\leqslant \leqslant C\omega(u, \delta)$. Далее, ограниченный оператор (3) переводит всякую слабо (сильно) сходящуюся последовательность в новую последовательность, которая также слабо (сильно) сходится. Отсюда и из формулы (4) вытекает

Теорема 1.28. *Если сингулярный оператор* (3) *ограничен в некотором пространстве $L_p(E_m)$, а функция $u(x)$ имеет в этом пространстве слабую* (*сильную*) *производную $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, то функция $v(x)$, представляющая собой значение интеграла* (3), *также имеет слабую* (*сильную*) *производную $\frac{\partial v}{\partial x_j}$, причем*

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}=\int_{E_m}K(x-y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\,dy. \tag{5}$$

Аналогичное утверждение верно и для высших производных.

Теорема 1.28 верна и для соболевских производных. Действительно, пусть функция $u(x)$ имеет обобщенную соболевскую производную $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, принадлежащую тому же пространству $L_p(E_m)$, что и функция u. Оператор (3) обозначим через K; как обычно, через K^* обозначим сопряженный оператор. Нетрудно видеть, что K^* есть сингулярный интеграл с ядром $\overline{K(y-x)}$. Если $\varphi(x)$ — гладкая финитная функция, то

$$\left(v,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=\left(Ku,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=\left(u,\ K^*\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right).$$

Функция φ имеет непрерывную (тем более, сильную) производную $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, поэтому, в силу формулы (5), $K^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}K^*\varphi$

и, следовательно,

$$\left(v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \left(u, \frac{\partial}{\partial x_j} K^*\varphi\right).$$

Интегрируя по частям, получаем далее

$$\left(v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, K^*\varphi\right) = -\left(K\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi\right).$$

Отсюда видно, что существует соболевская производная

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = K\frac{\partial u}{\partial x_j} = \int\limits_{E_m} K(x-y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\,dy.$$

ГЛАВА VI

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИМВОЛА

§ 29. Еще о дифференцировании интегралов со слабой особенностью

Пусть Ω — конечная область пространства E_m. Рассмотрим интеграл со слабой особенностью

$$v(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}} u(y)\, dy. \tag{1}$$

Теорема 1.29 [1]). *Если функция* $\varphi(x, \theta)$ *имеет непрерывные первые производные по декартовым координатам точек* $x \in \Omega$ *и* $\theta \in S$, *причем функция* $u(x) \in L_p(\Omega)$ *при некотором* p *из интервала* $1 < p < \infty$, *то интеграл со слабой особенностью* (1) *имеет обобщенные первые производные* $\frac{\partial v}{\partial x_k} \in L_p(\Omega)$, *которые могут быть получены по формуле* (2) § 8

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = \int\limits_{\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right] dy - u(x) \int\limits_{S} \varphi(x, \theta) \cos(r, x_k)\, dS. \tag{2}$$

Характеристика сингулярного интеграла в (2) непрерывна, и из теоремы 1.26 следует, что оператор в правой части формулы (2) ограничен в $L_p(\Omega)$.

Функцию $u(y)$ можно представить как предел в смысле сходимости в $L_p(\Omega)$ последовательности функций $u_n(x)$,

---

1) См. книгу автора [16], § 21, где эта теорема доказана для $p = 2$.

удовлетворяющих условию Липшица.[1]) Положим

$$v_n(x) = \int\limits_{\Omega} u_n(y) \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\, dy.$$

По теореме 1.8 функция $v_n(x)$ имеет первые производные (также удовлетворяющие условию Липшица)

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_k} = \int\limits_{\Omega} u_n(y) \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right] dy - u_n(x) \int\limits_{S} \varphi(x, \theta) \cos(r, x_k)\, dS. \tag{3}$$

Как уже отмечалось, оператор (2) ограничен в $L_p(\Omega)$; так как функция $u_n(x)$ принадлежит этому пространству, то ему же принадлежат и производные $\frac{\partial v_n}{\partial x_k}$. Более того, при $n \to \infty$ производная $\frac{\partial v_n}{\partial x_k}$ стремится в метрике пространства $L_p(\Omega)$ к пределу, равному правой части формулы (2). По известной теореме о замкнутости оператора обобщенного дифференцирования существуют первые производные $\frac{\partial v}{\partial x_k}$, и эти производные определяются формулой (2).

При некоторых ограничениях можно распространить теорему 1.29 и на бесконечные области. Пусть область Ω — бесконечная. Предположим следующее: 1) данная функция $u \in L_p(\Omega)$ такова, что и $v \in L_p(\Omega)$; 2) если функция $u_n(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то соответствующая функция $v_n(x) \in L_p(\Omega)$. Тогда достаточно повторить предшествующие рассуждения, взяв за аппроксимирующие функции $u_n(x)$ финитные непрерывно дифференцируемые функции.

§ 30. О полигармонических потенциалах

Полигармоническое уравнение $\Delta^q u$ имеет фундаментальное решение

$$\Gamma(x, y) = \begin{cases} Cr^{2q-m} \ln r, & m \text{ четное, } 2q \geqslant m, \\ Cr^{2q-m} & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{1}$$

о выборе постоянной C скажем несколько ниже. Пусть Ω некоторая область пространства E_m; для простоты примем,

[1]) Можно, например, считать, что $u_n(x)$ финитны и бесконечно дифференцируемы в Ω.

что она конечная. Составим интеграл

$$\psi(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x, y) f(y) \, dy, \tag{2}$$

который уместно назвать *полигармоническим потенциалом*; функцию $f(y)$ назовем *плотностью* этого потенциала. Известно, что если $f(y) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Omega)$, $\alpha > 0$, то при подходящем выборе постоянной C

$$(-\Delta)^q \psi = f(x). \tag{3}$$

Ниже будем считать, что эта постоянная именно так и выбрана.

Теорема 1.30. *Если $f(x) \in L_p(\Omega)$, то соответствующий полигармонический потенциал $\psi(x) \in W_p^{(2q)}(\Omega)$* [1]) *и удовлетворяет почти всюду в Ω уравнению* (3).

Функция $\Gamma(x, y)$ и ее производные порядка $< 2q$ представляют собой ядра со слабой особенностью (в некоторых случаях эти ядра просто ограничены). Производные порядка $2q$ от Γ представляют собой сингулярные ядра, характеристики которых не зависят от полюса и бесконечно дифференцируемы по декартовым координатам точки θ. Из результатов § 29 следует, что $\psi(x) \in W_p^{(2q)}(\Omega)$, причем в пространстве $L_p(\Omega)$ каждая из производных от $\psi(x)$ порядка $\leqslant 2q$ есть ограниченный оператор над $f(x)$. Чтобы доказать вторую часть теоремы, построим последовательность функций

$$f_n(x) \in \mathrm{Lip}_{\alpha_n}(\Omega), \quad \|f_n - f\|_{L_p(\Omega)} \to 0$$

и соответствующих им потенциалов $\psi_n(x)$. Тогда

$$(-\Delta)^q \psi_n = f_n(x) \quad \text{и} \quad \|\psi_n(x) - \psi(x)\|_{L_p(\Omega)} \to 0.$$

Мы уже отметили, что производные порядка $2q$ от $\psi_n(x)$ суть ограниченные в $L_p(\Omega)$ операторы над $f_n(x)$; отсюда следует, что при $n \to \infty$ указанные производные стремятся в метрике $L_p(\Omega)$ к некоторым пределам, которые в силу замкнутости оператора обобщенного дифференцирования суть соответствующие обобщенные производные от $\psi(x)$. Переходя теперь к пределу в тождестве $(-\Delta)^q \psi_n = f_n(x)$, найдем $(-\Delta)^q \psi = f(x)$.

---

[1]) Символика С. Л. Соболева [1].

§ 31. О рядах по сферическим функциям[1])

В настоящем параграфе мы будем придерживаться следующих обозначений и определений. Будем писать

$$|x| = \rho, \quad \theta = \frac{x}{\rho},$$

где x — точка евклидова пространства E_m. Если некоторая функция $f(\theta)$ задана на единичной сфере S, то будем считать ее продолженной на все пространство E_m (за исключением нуля и бесконечности) так, что она остается постоянной на лучах, проходящих через начало. Через $W_2^{(l)}(S)$ обозначается пространство функций, заданных на S и продолженных так, как только что было указано, имеющих всевозможные обобщенные производные порядка l по декартовым координатам точки $\theta \in S$, квадратично суммируемые по шаровому слою $\rho_1 < \rho < \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 некоторые положительные постоянные. Как обычно, $L_2(S)$ означает пространство функций, заданных почти всюду на S и квадратично суммируемых на S; через $\tilde{L}_2(S)$ мы обозначаем подпространство упомянутого пространства, ортогональное к единице. Через $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$ обозначены m-мерные сферические функции порядка n; индекс k получен в результате нумерации сферических функций одного и того же порядка n и меняется в пределах[2])

$$1 \leqslant k \leqslant k_n, \quad k_n = (2n + m - 2)\frac{(n+m-3)!}{(m-2)!\,n!}.$$

Функции $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$ будем считать ортогональными и нормированными на сфере S.

Если функция $f(\theta) \in L_2(S)$, то ее можно разложить в ряд по сферическим функциям

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta); \tag{1}$$

---

[1]) Основные результаты настоящего параграфа изложены в заметке автора [24].

[2]) См., например, справочник А. Эрдейи и др. [1].

ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} | a_n^{(k)} |^2 \tag{2}$$

при этом сходится. Задача настоящего параграфа — установить связь между оценками коэффициента $a_n^{(k)}$ и дифференциальными свойствами функции $f(\theta)$.

Оператор Лапласа в пространстве E_m в сферических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{m-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \delta;$$

δ — дифференциальный оператор второго порядка (см. Ф. Г. Мелер [1] или А. Эрдейи и др. [1]):

$$\delta = - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{q_j \sin^{m-j-1} \vartheta_j} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \left(\sin^{m-j-1} \vartheta_j \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \right), \tag{3}$$

где

$$q_1 = 1, \quad q_j = (\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \ldots \sin \vartheta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Оператор δ симметричен в $L_2(S)$; ему соответствует квадратичная форма

$$(\delta f, f) = \int_S \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{q_j} \left| \frac{\partial f}{\partial \vartheta_j} \right|^2 dS. \tag{4}$$

Из формулы (4) видно, что оператор δ неотрицателен и потому допускает расширение до самосопряженного по Фридрихсу.[1] Ниже через δ обозначено именно это расширение.

Пусть $f(\theta) \in W_2^{(2)}(S)$. Применим формулу Грина

$$\int_\Omega (v \Delta u - u \Delta v)\, dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS,$$

приняв за Ω внутренность единичной сферы и положив $u = \rho^2 f(\theta)$, $v = \rho^n Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$. Это приведет нас к формуле

$$\int_S [n(n+m-2) f(\theta) - \delta f] Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\, dS = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots, k_n. \tag{5}$$

[1] К. Фридрихс [1]; см. также книгу автора [16].

Обозначим через α_n^k коэффициенты разложения функции δf в ряд по сферическим функциям. Из формул (1) и (5) вытекает

$$\alpha_n^{(k)} = n(n+m-2)a_n^{(k)}. \tag{6}$$

Из формулы (6) и из полноты системы сферических функций в $L_2(S)$ вытекает, что спектр оператора δ состоит из собственных чисел

$$\lambda_n = n(n+m-2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$.

Если $f(\theta) \in D(\delta^q)$, где q любое положительное число, то нетрудно установить и более общую формулу

$$\gamma_n^{(k)} = n^q(n+m-2)^q a_n^{(k)}, \tag{8}$$

где $\gamma_n^{(k)}$ коэффициенты разложения функции $\delta^q f$ в ряд по сферическим функциям.

Теорема 1.31. *Для того чтобы $f(\theta) \in W_2^{(l)}(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (1) *допускали представление*

$$a_n^{(k)} = n^{-l}\beta_n^{(k)}, \quad n \geqslant 1, \tag{9}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |\beta_n^{(k)}|^2 < \infty. \tag{9a}$$

Необходимость. Если $f(\theta) \in W_2^{(l)}(S)$ и $q = \frac{l}{2}$, то $\delta^q f \in L_2(S)$ и имеет место сходящееся в среднем разложение

$$\delta^q f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \gamma_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta),$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |\gamma_n^{(k)}|^2 < \infty.$$

В соответствии с формулой (7) достаточно теперь положить

$$\beta_n^{(k)} = \frac{n^q}{(n+m-2)^q} \gamma_n^{(k)}.$$

Достаточность. Положим

$$\alpha_n^{(k)} = \frac{(n+m-2)^q}{n^q} \beta_n^{(k)}, \qquad q = \frac{l}{2},$$

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \alpha_n^{(k)} Y_{n, m}^{(k)}(\theta).$$

Очевидно, $\varphi(\theta) \in L_2(S)$.

В инвариантном для оператора δ подпространстве $\widetilde{L}_2(S)$ спектр этого оператора состоит из чисел (7), за исключением числа $\lambda_0 = 0$. Отсюда следует, что в $\widetilde{L}_2(S)$ оператор δ—положительно определенный, и уравнение

$$\delta^q F = \varphi(\theta) \tag{10}$$

имеет в $\widetilde{L}_2(S)$ единственное решение; нетрудно видеть, что

$$f(\theta) = F(\theta) + \text{const},$$

и остается доказать, что $F(\theta) \in W_2^{(l)}(S)$. Доказательство проведем отдельно для четных и нечетных l. Пусть $l = 2s$. Обозначим через Σ сферический слой $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Далее, вычислим $(-\Delta)^s f$. Так как $F(\theta)$ не зависит от ρ, то $-\Delta F = \frac{1}{\rho^2} \delta F$. Отсюда

$$(-\Delta)^s F = \sum_{j=1}^{s} p_j(\rho) \delta^j F,$$

где $p_j(\rho)$ — некоторые полиномы от ρ^{-1}. Из формул (6), (8), (10) и из выражения для $\varphi(\theta)$ легко вытекает, что

$$\delta^j F = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{a_n^{(k)}}{[n(n+m-2)]^{s-j}} Y_{n, m}^{(k)}(\theta).$$

В силу условий (9) и (9a) ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{|a_n^{(k)}|^2}{[n(n+m-2)]^{2(s-j)}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s,$$

сходятся, поэтому $\delta^j F \in L_2(S)$, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Положим для краткости

$$\sum_{j=1}^{s} p_j(\rho)\delta^j F = \Phi(x);$$

очевидно, $\Phi(x) \in L_2(\Sigma)$. Пусть, далее, $\Gamma(x, y)$ фундаментальное решение уравнения $\Delta^s u = 0$. Тогда $F(\theta)$ можно представить в виде

$$F(\theta) = \int_{\Sigma} \Gamma(x, y)\Phi(y)\,dy + F_0(x), \tag{11}$$

где функция $F_0(x)$ полигармоническая в Σ. Как известно, в любой внутренней подобласти Σ, в частности, в любом шаровом слое Σ', более узком, чем Σ, функция $F_0(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков. Что же касается первого слагаемого в (11), то оно, в силу теоремы 1.30, принадлежит пространству $W_2^{(2s)}(\Sigma)$. Но тогда ясно, что $F(\theta) \in W_2^{(2s)}(\Sigma')$ или, что то же, $F(\theta) \in W_2^{(l)}(S)$.

Пусть теперь $l = 2s + 1$. Найдем функцию $\varphi_1(\theta) \in \widetilde{L}_2(S)$, удовлетворяющую уравнению

$$\delta^{\frac{1}{2}}\varphi_1(\theta) = \varphi(\theta);$$

эта функция представляется рядом

$$\varphi_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{a_n^{(k)}}{\sqrt{n(n+m-2)}} Y_{n,m}^{(k)}(\theta).$$

Из формулы (4) ясно, что функция $\varphi_1(\theta) \in W_2^{(1)}(S)$. Далее, если $F(\theta)$ удовлетворяет уравнению (10), то

$$(-\Delta)^s F = \sum_{j=1}^{s} p_j(\rho)\delta^j F = \Phi_1(x),$$

и нетрудно убедиться, что $\Phi_1(x) \in W_2^{(1)}(\Sigma)$. Как и выше,

$$F(x) = \int_{\Sigma} \Gamma(x, y)\Phi_1(y)\,dy + F_0(x). \tag{12}$$

В более узком слое Σ' полигармоническая функция $F_0(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков, тогда как интеграл в (12), в силу теорем 1.30 и 2.28, принадлежит пространству $W_2^{(2s+1)}(\Sigma)=W_2^{(l)}(S)$.

Теорема 2.31.[1]) *Если* $f(\theta)\in W_2^{(l)}(S)$, *где* $l\geqslant m-1$, *то ряд* (1), *а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка* $l-m+1$ *по декартовым координатам точки* θ, *сходятся абсолютно и равномерно.*

В силу формул (6) § 23 и (9), мажорантным для ряда (1) является ряд

$$C_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}|\beta_n^{(k)}|\,n^{-\left(l-\frac{m}{2}+1\right)}\leqslant\frac{C_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}|\beta_n^{(k)}|^2+$$
$$+\frac{C_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}k_n n^{-(2l-m+2)},\qquad C_1=\text{const}.$$

Первый ряд справа сходится, и достаточно указать условие сходимости второго ряда. Но $k_n=O(n^{m-2})$, и второй ряд сходится, если $2l-2m+4>1$, для чего, в свою очередь, достаточно, чтобы $l\geqslant m-1$.

Чтобы доказать утверждение относительно производных ряда (1), воспользуемся оценкой А. Кальдерона и А. Зигмунда [7][2])

$$D^rY_{n,m}^{(k)}(\theta)=O\left(n^{\frac{m}{2}-1+r}\right),\tag{13}$$

---

[1]) О. А. Ладыженская (см., например, [2], гл. II, § 4) ранее установила теоремы, относящиеся к разложениям по собственным функциям невырождающегося самосопряженного эллиптического оператора и близкие к теоремам 2.31 и 3.31.

[2]) Приведем данный А. Кальдероном и А. Зигмундом вывод оценки (13). Пусть $Y_{n,m}(\theta)$ — m-мерная сферическая функция порядка n. Положим $\rho=|x|$ и $\theta=\dfrac{x}{\rho}$, где x — произвольная точка пространства E_m. Произведение $Q_n(x)=\rho^nY_{n,m}(\theta)$ есть гармоническая функция от x и, по известной формуле Грина,

$$\int\limits_{\rho<1}|\operatorname{grad}Q_n(x)|^2\,dx=\int\limits_S\overline{Q}_n\frac{dQ_n}{d\rho}\,dS,$$

или

$$\frac{1}{2n+m-2}\int\limits_S|\operatorname{grad}Q_n|^2\,dS=n\int\limits_S|Q_n|^2\,dS.$$

где D^r — любая производная порядка r по декартовым координатам точки θ. Ряд, полученный r-кратным дифференцированием ряда (1), имеет мажоранту

$$C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |\beta_n^{(k)}| \, n^{-\left(l-\frac{m}{2}+1-r\right)}, \quad C_2 = \text{const};$$

рассуждая по-прежнему, убедимся, что эта мажоранта сходится, если $r \leqslant l - m + 1$.

Теорема 3.31. *Если $f(\theta) \in W_2^{(l)}(S)$, то ряды, полученные r-кратным ($r \leqslant l$) дифференцированием ряда* (1) *по декартовым координатам точки θ, сходятся на S в среднем с показателем*

$$\frac{2(m-1)}{m-1-2(l-r)}. \tag{14}$$

В силу теоремы 1.31, $f(\theta) \in D\left(\delta^{\frac{l}{2}}\right)$. Если $f(\theta)$ представляется рядом (1), то

$$\varphi(\theta) = \delta^{\frac{l}{2}} f = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{\frac{l}{2}} (n+m-2)^{\frac{l}{2}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta),$$

Отсюда

$$\left\| \frac{\partial Q_n}{\partial x_j} \right\| \leqslant C_1 n \| Q_n \| = C_1 n \| Y_{n,m} \|, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Выражение $\left.\frac{\partial Q_n}{\partial x_j}\right|_{\rho=1}$ есть m-мерная сферическая функция порядка $n-1$; по формуле (6) § 23,

$$\left| \left.\frac{\partial Q_n}{\partial x_j}\right|_{\rho=1} \right| \leqslant C \left\| \frac{\partial Q_n}{\partial x_j} \right\| (n-1)^{\frac{m}{2}-1} \leqslant C_2 \| Y_{n,m} \| n^{\frac{m}{2}}.$$

Но

$$\frac{\partial Y_{n,m}}{\partial x_j} = \left.\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right|_{\rho=1} - n \frac{\partial \rho}{\partial x_j} Y_{n,m};$$

применяя опять формулу (6) § 23, убедимся, что $\left| \frac{\partial Y_{n,m}}{\partial x_j} \right| \leqslant$ $\leqslant C_3 \| Y_{n,m} \| n^{\frac{m}{2}}$, что совпадает с формулой (13) при $r = 1$. Общий случай теперь легко получается по индукции.

причем последний ряд сходится в среднем на S. Поэтому, если мы положим

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_n} n^{\frac{l}{2}}(n+m-2)^{\frac{l}{2}}\, a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta)=\varphi_N(\theta),$$

то $\varphi_N(\theta)\to\varphi(\theta)$ в метрике пространства $L_2(S)$. Обозначим

$$f_N(\theta)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta),$$

тогда $f_N(\theta)\to f(\theta)$ и $\varphi_N(\theta)=\delta^{\frac{l}{2}} f_N$.

По заданной $\varphi(\theta)$ функция $f(\theta)$ восстанавливается с точностью до постоянного слагаемого; производные от $f(\theta)$ восстанавливаются точно. Можно поэтому рассматривать $D^l f(\theta)$ как оператор над $\varphi(\theta)$ в пространстве $\tilde{L}_2(S)$; будем писать $D^l f = G\varphi$. По теореме 1.31 оператор G определен на всем пространстве $\tilde{L}_2(S)$; докажем, что этот оператор замкнут. Пусть дана последовательность $\Phi_\nu(\theta)\in\tilde{L}_2(S)$, $\Phi_\nu\to\Phi$; обозначим $\delta^{-\frac{l}{2}}\Phi_\nu=F_\nu(\theta)$ и пусть $D^l F_\nu(\theta)\to\omega(\theta)$. Можно сделать функции $F_\nu(\theta)$ вполне определенными, потребовав, чтобы $F_\nu(\theta)\in\tilde{L}_2(S)$. Тогда оператор $\delta^{-\frac{l}{2}}$ ограничен, и $F_\nu(\theta)$ стремится в среднем к функции $F(\theta)=\delta^{-\frac{l}{2}}\Phi(\theta)$. Теперь

$$F_\nu(\theta)\to F(\theta),\qquad D^l F_\nu(\theta)\to\omega(\theta).$$

В силу замкнутости оператора обобщенного дифференцирования, $D^l F(\theta)=\omega(\theta)$, что и требовалось доказать.

Замкнутый и определенный на всем пространстве оператор G ограничен. Отсюда следует, что $G\varphi_N\to G\varphi$ или, что то же,

$$D^l f_N\to D^l f.$$

Последнее равенство показывает, что ряд (1) можно дифференцировать l раз, и получаемые таким образом ряды сходятся в среднем с показателем 2. Тем самым теорема доказана для $r=l$; для $r<l$ она теперь непосредственно вытекает из теорем вложения С. Л. Соболева [1].

Особо остановимся на случае, когда функции точки θ, о которых идет речь в настоящем параграфе, зависят еще и от некоторого параметра x, которым может быть, в частности, точка пространства E_m или любого другого многообразия. Ниже, говоря о дифференцировании, мы будем иметь в виду только дифференцирование по декартовым координатам точки $\theta \in S$.

Будем говорить, что функция $f(x, t, \ldots, \theta)$ принадлежит пространству $W_p^{(l)}(S)$ *равномерно по отношению к параметрам* $x, t, \ldots$, если при любых фиксированных значениях параметров $f(x, t, \ldots, \theta) \in W_p^{(l)}(S)$ и

$$\int\limits_S |f(x, t, \ldots, \theta)|^p\, dS \leqslant C, \qquad \int\limits_S |D^l f|^p\, dS \leqslant C, \tag{15}$$

где C не зависит от $x, t, \ldots$ Будем писать в этом случае $f(x, t, \ldots, \theta) \mathrel{\hat{\in}} W_p^{(l)}(S)$. Ниже будем обозначать совокупность параметров одной буквой x.

Для функций, которые равномерно по отношению к x принадлежат пространству $W_2^{(l)}(S)$, справедливы следующие теоремы, являющиеся аналогами или видоизменениями предшествующих теорем настоящего параграфа.

Теорема 4.31. *Для того чтобы $f(x, \theta) \mathrel{\hat{\in}} W_2^{(l)}(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда*

$$f(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)}(x)\, Y_{n, m}^{(k)}(\theta) \tag{16}$$

удовлетворяли неравенствам

$$|a_0^{(1)}(x)| \leqslant C', \quad C' = \text{const}; \tag{17а}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |a_n^{(k)}(x)|^2 \leqslant C'', \quad C'' = \text{const}. \tag{17б}$$

Необходимость. Если $f(x, \theta) \mathrel{\hat{\in}} W_2^{(l)}(S)$, то

$$\int\limits_S \left| \delta^{\frac{l}{2}} f \right|^2 dS \leqslant C_1 = \text{const} \tag{18}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^l (n + m - 2)^l |a_n^{(k)}(x)|^2 \leqslant C_1.$$

Отсюда вытекает неравенство (17б), так как $\frac{n+m-2}{n} \leqslant \leqslant m-1$. Что касается неравенства (17а), то оно сразу вытекает из первого неравенства (15) при $p=2$.

Достаточность. Из неравенства (17б) очевидным образом вытекает неравенство (18). В процессе доказательства теоремы 3.31 была установлена ограниченность оператора G:

$$\|D^l f\| \leqslant \|G\| \cdot \left\|\delta^{\frac{l}{2}} f\right\|.$$

Отсюда

$$\int\limits_S |D^l f|^2 dS \leqslant (m-1)^l C'' \|G\|^2,$$

и второе из неравенств (15) доказано. Чтобы установить первое из неравенств (15), напомним, что оператор $\delta^{-\frac{l}{2}}$ ограничен в $\widetilde{L}_2(S)$. Обозначая $\delta^{\frac{l}{2}} f = g(x, \theta)$, имеем

$$f(x, \theta) = a_0^{(1)}(x) + \delta^{-\frac{l}{2}} g(x, \theta),$$

откуда

$$|f(x, \theta)|^2 \leqslant 2\left[|a_0^{(1)}(x)|^2 + \left|\delta^{-\frac{l}{2}} g(x, \theta)\right|^2\right].$$

Интегрируя это по S, получим

$$\int\limits_S |f(x, \theta)|^2 dS \leqslant \frac{4\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} C'^2 + 2\left\|\delta^{-\frac{l}{2}}\right\|^2 \cdot \|g(x, \theta)\|^2 \leqslant \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5.31. *Пусть* $f(x, \theta) \in \hat{W}_2^{(l)}(S)$.

Если $l \geqslant m-1$, *то ряд* (16), *а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка* $r \leqslant l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Ряд (16) продифференцируем r раз. Остаток соответствующего ряда абсолютных величин

$$\sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |a_n^{(k)}(x)| \cdot |D^r Y_{n,m}^{(k)}(\theta)|$$

не превосходит произведения некоторой постоянной на величину

$$2\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{\frac{m}{2}-1+r}\,|a_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l-\eta}\,|a_n^{(k)}(x)|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} k_n n^{-2l+\eta+m-2+2r},$$

где η — произвольное положительное число. Сумма первого ряда справа не превосходит величины

$$\frac{1}{N^{\eta}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\,|a_n^{(k)}(x)|^2 \leqslant \frac{C''}{N^{\eta}}.$$

Общий член второго ряда справа имеет оценку

$$O(n^{-2l+\eta+2m-4+2r}),$$

и ряд сходится и имеет сумму, сколь угодно малую при достаточно большом N, если $2l-\eta-2m+4-2r>1$, для чего достаточно $r\leqslant l-m+1$.

Теорема 6.31. *Если $f(x,\theta)\hat{\in} W_2^{(l)}(S)$, $l\geqslant 1$, то ряды, полученные из ряда* (16) *его r-кратным* ($r\leqslant l-1$) *дифференцированием, сходятся на S в среднем с показателем*

$$\frac{2(m-1)}{m-1-2(l-1-r)}. \tag{19}$$

Рассмотрим ряд

$$\delta^{\frac{l-1}{2}} f = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{\frac{l-1}{2}}(n+m-2)^{\frac{l-1}{2}}\, a_n^{(k)}(x)\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta) \tag{20}$$

и оценим его остаток

$$\left\| \sum_{n=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{\frac{l-1}{2}}(n+m-2)^{\frac{l-1}{2}}\, a_n^{(k)}(x)\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (m-1)^{l-1}\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l-2}\,|a_n^{(k)}(x)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(m-1)^{l-1}}{N^2}\sum_{\eta=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\,|a_n^{(k)}(x)|^2 \leqslant \frac{(m-1)^{l-1}C''}{N^2}.$$

Отсюда видно, что ряд (20) сходится в среднем с показателем 2 равномерно по отношению к x. Теперь для $r = l - 1$ теорема вытекает из ограниченности оператора G, а для $r < l - 1$ — из теорем вложения С. Л. Соболева.

Замечание. Если желательно, чтобы ряд, полученный r-кратным дифференцированием ряда (16), сходился на S в среднем с заданным показателем $p > 2$, то достаточно потребовать, чтобы $f(x, \theta) \in \hat{W}_2^{(l)}(S)$, где, в соответствии с формулой (19),

$$l \geqslant r + (m-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1. \tag{21}$$

Ниже нам понадобится $r \geqslant \frac{m+1}{2}$ и достаточно, чтобы

$$l \geqslant \frac{m-1}{p'} + 2. \tag{22}$$

Если $1 < p < 2$, то достаточно $l \geqslant \frac{m+3}{2}$.

Теорема 7.31. *Пусть A — простейший сингулярный оператор, символ которого $\Phi_A(x, \theta) \in \hat{W}_2^{(l)}(S)$, где $l \geqslant \frac{m+3}{2}$ при $p < 2$ и $l \geqslant \frac{m-1}{p'} + 2$ при $p \geqslant 2$. Разложению символа в ряд по сферическим функциям*

$$\Phi_A(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta) \tag{23}$$

соответствует разложение оператора A в сходящийся в норме $L_p(E_m)$ ряд

$$Au = a_1^{(0)}(x) u(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{a_n^{(k)}(x)}{\gamma_{n,m}} \int_{E_m} \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta)}{r^m} u(y)\, dy. \tag{24}$$

В условиях теоремы остатки ряда (23) и рядов его производных нужного порядка стремятся к нулю равномерно относительно x в метрике пространства $L_p(S)$. По теореме 1.26 норма в $L_p(E_m)$ остатка ряда (24) стремится к нулю.

§ 32. Дифференциальные свойства символа и характеристики

В § 22 была установлена некоторая связь между дифференциальными свойствами символа и характеристики. В настоящем параграфе мы, опираясь на результаты § 31, выясним более точные соотношения.

Предположим сперва, что характеристика не зависит от полюса. Разложим ее в ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta); \tag{1}$$

как и выше, функции $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$ считаем ортонормированными на сфере S. Характеристике $f(\theta)$ соответствует символ

$$\Phi(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \gamma_{n,m} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta), \quad \gamma_{n,m}=\frac{i^n \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}. \tag{2}$$

Пусть $f(\theta)\in W_2^{(l)}(S)$, $l\geqslant 1$. Тогда по формуле (7) § 31

$$a_n^{(k)}=\frac{\gamma_n^{(k)}}{[n(n+m-2)]^{\frac{l}{2}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} |\gamma_n^{(k)}|^2<\infty. \tag{3}$$

В силу формулы Стирлинга

$$\gamma_{n,m}=O\left(n^{-\frac{m}{2}}\right), \quad \gamma_{n,m}^{-1}=O\left(n^{\frac{m}{2}}\right). \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) следует представление

$$\gamma_{n,m} a_n^{(k)}=\frac{b_n^{(k)}}{n^{l+\frac{m}{2}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} |b_n^{(k)}|^2<\infty. \tag{5}$$

Теперь из теоремы 1.31 вытекает

Теорема 1.32. *Если характеристика* $f(\theta)\in W_2^{(l)}(S)$, *то символ* $\Phi(\theta)=W_2^{(\lambda)}(S)$, *где*

$$\lambda=\left[l+\frac{m}{2}\right], \tag{6}$$

одновременно $\Phi(\theta)\in D\left(\delta^{\frac{l}{2}+\frac{m}{4}}\right)$.

Столь же просто доказывается

Теорема 2.32. *Если символ сингулярного интеграла* $\Phi(\theta)\in W_2^{(\lambda)}(S)$, $\lambda\geqslant\frac{m}{2}$, *то его характеристика* $f(\theta)\in W_2^{(l)}(S)$, где $l=\left[\lambda-\frac{m}{2}\right]$.

Из теорем вложения С. Л. Соболева [1] вытекает следующее. Если $f(\theta)\in W_2^{(l)}(S)$, то $\Phi(\theta)\in C^{(r)}(S)$, где $0\leqslant r<$ $<\lambda-\frac{m}{2}=\left[l+\frac{m}{2}\right]-\frac{m}{2}$ и $C^{(r)}(S)$ означает множество функций, имеющих на S непрерывные производные порядка $\leqslant r$. Во всяком случае, следовательно, если $f(\theta)\in W_2^{(l)}(S)$, то $\Phi(\theta)\in C^{(l-1)}(S)$. Точно так же, если $\Phi(\theta)\in W_2^{(\lambda)}(S)$ и $\lambda>m+1$, то $f(\theta)\in C^{(r)}(S)$, $0\leqslant r<\left[\left[\lambda+\frac{m}{2}\right]-\frac{m}{2}\right]$.

Пусть $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ — характеристики двух сингулярных операторов, и пусть $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)\in W_2^{(l)}(S)$. Обозначим через $f(\theta)$ характеристику произведения этих операторов. Символы $\Phi_1(\theta)$ и $\Phi_2(\theta)$ данных операторов, а следовательно, и символ произведения $\Phi(\theta)=\Phi_1(\theta)\Phi_2(\theta)$, принадлежат $C^{(l-1)}(S)$. Одновременно $\Phi_1(\theta)$, $\Phi_2(\theta)\in W_2^{\left[l+\frac{m}{2}\right]}$. Докажем, что если $l\geqslant 1$, то и $\Phi(\theta)\in W_2^{\left[l+\frac{m}{2}\right]}(S)$. Для краткости обозначим $\left[l+\frac{m}{2}\right]=k$. Обозначая, как и выше, символом $D^{(r)}$ любую производную порядка r, имеем

$$D^{(k)}\Phi=\sum_{r=0}^{k}D^{(r)}\Phi_1D^{(k-r)}\Phi_2. \tag{7}$$

Каждая из функций $D^{(r)}\Phi_1$, $D^{(k-r)}\Phi_2$ во всяком случае квадратично суммируема, поэтому если какая-либо из этих функций непрерывна, то соответствующее слагаемое в (7) квадратично суммируемо. По теореме вложения $D^{(r)}\Phi_1$ непрерывна, если $r < k - \frac{m}{2}$ и $D^{(k-r)}\Phi_2$ непрерывна, если $r > \frac{m}{2}$. Остается исследовать слагаемые, для которых $k - \frac{m}{2} \leqslant \leqslant r \leqslant \frac{m}{2}$, если такие слагаемые имеются. Докажем, что они квадратично суммируемы:

$$\int\limits_S |D^{(r)}\Phi_1|^2 \cdot |D^{(k-r)}\Phi_2|^2 dS < \infty. \tag{8}$$

К интегралу (8) применим неравенство Гельдера, полагая $p = \frac{m}{2r - \varepsilon}$, где ε достаточно малая положительная величина;

$$\int\limits_S |D^{(r)}\Phi_1|^2 \cdot |D^{(k-r)}\Phi_2|^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_S |D^{(r)}\Phi_1|^{\frac{2m}{2r-\varepsilon}} dS\right)^{\frac{2r-\varepsilon}{m}} \left(\int\limits_S |D^{(k-r)}\Phi_2|^{\frac{2m}{m-2r+\varepsilon}} dS\right)^{\frac{m-2r+\varepsilon}{m}}. \tag{9}$$

При $l \geqslant 1$ каждый интеграл справа в (9) конечен. Действительно, по теореме вложения $D^{(r)}\Phi$ суммируема со степенью $\frac{2m}{m - 2(k-r)}$, и достаточно, чтобы $\frac{2m}{2r - \varepsilon} \leqslant \frac{2m}{m - 2(k-r)}$ или $\left[l + \frac{m}{2}\right] \geqslant \frac{m+\varepsilon}{2}$, что во всяком случае верно при $l \geqslant 1$. Далее, по той же теореме вложения $D^{(k-r)}\Phi_2 \in L_{\frac{2m}{m-2r}}$ и, тем более, $D^{(k-r)}\Phi_2 \in L_{\frac{2m}{m-2r+\varepsilon}}$. Наше утверждение доказано.

Теперь из теоремы 2.31 вытекает, что $f(\theta) \in W_2^{(l_1)}(S)$, где $l_1 = \left[\left[l + \frac{m}{2}\right] - \frac{m}{2}\right]$, иначе говоря, $l_1 = l$ при m четном и $l_1 = l - 1$ при m нечетном.

В частности, если $f_1(\theta)$, $f_2(\theta) \in C^{(\infty)}(S)$, то и $f \in C^{(\infty)}(S)$. Этот результат был ранее и другим путем получен А. Кальдероном и А. Зигмундом [5].

Замечание. Если характеристика и символ зависят от полюса, то теоремы настоящего параграфа остаются в силе с той оговоркой, что характеристика и символ принадлежат соответствующим пространствам $W_2^{(k)}(S)$ равномерно по отношению к x.

§ 33. Правило умножения символов в общем случае [1])

Лемма 1.33. *Пусть функция* $b(x)$, $x \in E_m$, *переходит при стереографическом преобразовании в некоторую функцию* $b'(\xi)$, *непрерывную на римановой сфере* Σ. *Тогда оператор*

$$Mu = \int\limits_{E_m} \frac{b(y) - b(x)}{r^m} Y_{n,m}^{(k)}(\theta) u(y)\, dy$$

вполне непрерывен в $L_p(E_m)$, *где* $1 < p < \infty$.

Если $b'(\xi) \in \mathrm{Lip}_\lambda(\Sigma)$, $\lambda > 0$, то лемма вытекает из леммы 2.4. В общем случае аппроксимируем равномерно функцию $b'(\xi)$ последовательностью функций $b_j'(\xi) \in \mathrm{Lip}_1(\Sigma)$ и положим $b_j'(\xi) = b_j(x)$. Тогда $\max|b_j(x) - b(x)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, а операторы

$$M_j u = \int\limits_{E_m} \frac{b_j(y) - b_j(x)}{r^m} Y_{n,m}^{(k)}(\theta) u(y)\, dy$$

вполне непрерывны в $L_p(E_m)$. Оценим норму $\|M - M_j\|$. Пусть a — норма сингулярного оператора с характеристикой $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$. Имеем

$$\|Mu - M_j u\| \leqslant \left\| \int\limits_{E_m} \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta)}{r^m} [b(y) - b_j(y)]\, u(y)\, dy \right\| + \\ + \left\| [b(x) - b_j(x)] \int\limits_{E_m} \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta)}{r^m} u(y)\, dy \right\| \leqslant \\ \leqslant 2a \max|b(x) - b_j(x)| \cdot \|u\|.$$

Отсюда

$$\|M - M_j\| \leqslant 2a \max|b(x) - b_j(x)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

и, следовательно, оператор M вполне непрерывен.

Замечание. Условие леммы 1.33 можно сформулировать так: по данному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $\frac{r}{2}[(1 + x^2)(1 + y^2)]^{-\frac{1}{2}} < \delta$, то $|b(y) - b(x)| < \varepsilon$.

---

[1]) Основной результат настоящего параграфа (теорема 1.33) приведен в заметке автора [25]. В более слабом виде теорема 1.33 содержится в предшествующих работах автора [19] и [22].

Теорема 1.33. *Пусть символы* $\Phi_A(x, \theta)$ *и* $\Phi_B(x, \theta)$ *двух сингулярных операторов* A *и* B *равномерно относительно* θ *непрерывны как функции точки* ξ *римановой сферы. Пусть еще эти символы равномерно по отношению к* x *принадлежат пространству* $W_2^{(l)}(S)$, *где* $l \geqslant \frac{m-1}{p'} + 2$ *при* $p \geqslant 2$ *и* $l \geqslant \frac{m+3}{2}$ *при* $p < 2$. *Тогда оператор* $AB - BA$ *вполне непрерывен в* $L_p(E_m)$ *и символ произведения* AB *равен произведению символов* $\Phi_A(x, \theta)\Phi_B(x, \theta)$.

Замечание. Упомянутое в теореме условие непрерывности символов означает следующее: по данному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $\frac{r}{2}[(1+x^2)(1+y^2)]^{-\frac{1}{2}} < \delta$, то $|\Phi_A(y, \theta) - \Phi_A(x, \theta)| < \varepsilon$ и $|\Phi_B(y, \theta) - \Phi_B(x, \theta)| < \varepsilon$ независимо от положения точки θ на сфере S.

Доказательство теоремы 1.33. Обозначим через C сингулярный оператор, символ которого равен произведению $\Phi_A(x, \theta)\Phi_B(x, \theta)$. По теореме 1.26 операторы A и B (а также оператор C) ограничены в $L_p(E_m)$, а из теоремы 7.31 вытекает, что эти операторы разлагаются в сходящиеся по норме ряды, соответствующие разложениям их символов в ряды по сферическим функциям. Пусть

$$\begin{aligned} \Phi_A(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta), \\ \Phi_B(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} b_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{a_n^{(k)}(x)}{\gamma_{n,m}} \int\limits_{E_m} \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta)}{r^m} u(y)\,dy + T_1 u, \\ Bu &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{b_n^{(k)}(x)}{\gamma_{n,m}} \int\limits_{E_m} \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta)}{r^m} u(y)\,dy + T_2 u. \end{aligned} \tag{2}$$

Нулевые члены рядов (2) на самом деле суть $a_1^{(0)}(x)u(x)$ и $b_1^{(0)}(x)u(x)$; на дальнейших рассуждениях это замечание по существу не отразится.

Ряды (1) разобьем на конечные суммы Φ'_A, Φ'_B и остатки Φ''_A, Φ''_B; соответственно ряды (2) разобьются на суммы $A = A' + A'' + T_1$, $B = B' + B'' + T_2$. Разбиение произведем так, чтобы нормы остатков A'' и B'' были сколь угодно малы. Теперь

$$AB = A'B' + (A'B'' + A''B' + A''B'') + (AT_2 + T_1 B);$$

норма оператора в первой скобке сколь угодно мала, а оператор во второй скобке вполне непрерывен. Далее, $A'B'u$ есть конечная сумма выражений вида

$$\frac{a_n^{(k)}(x)}{\gamma_{n,m}} \int\limits_{E_m} \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta_{xy})}{r_{xy}^m} \cdot \frac{b_q^{(s)}(y)}{\gamma_{q,m}} dy \int\limits_{E_m} \frac{Y_{q,m}^{(s)}(\theta_{yz})}{r_{yz}^m} u(z)\,dz =$$

$$= \frac{a_n^{(k)}(x)\, b_q^{(s)}(x)}{\gamma_{n,m}\gamma_{q,m}} \int\limits_{E_m} \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta_{xy})}{r_{xy}^m} dy \int\limits_{E_m} \frac{Y_{q,m}^{(s)}(\theta_{yz})}{r_{yz}^m} u(z)\,dz +$$

$$+ \frac{a_n^{(k)}(x)}{\gamma_{n,m}\gamma_{q,m}} \int\limits_{E_m} \frac{b_q^{(s)}(y) - b_q^{(s)}(x)}{r_{xy}^m} Y_{n,m}^{(k)}(\theta_{xy})\,dy \int\limits_{E_m} \frac{Y_{q,m}^{(s)}(\theta_{yz})}{r_{yz}^m} u(z)\,dz. \tag{3}$$

Во втором слагаемом справа в (3) внутренний интеграл есть оператор ограниченный, а внешний вполне непрерывен в силу леммы 1.33. Но тогда упомянутое слагаемое вполне непрерывно как произведение операторов ограниченного и вполне непрерывного; входящая в произведение $A'B'$ конечная сумма таких слагаемых также вполне непрерывна. Далее, повторный интеграл в первом слагаемом справа в (3) есть композиция сингулярных интегралов, характеристики которых $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$ и $Y_{q,m}^{(s)}(\theta)$ не зависят от полюса. В силу результатов гл. III, эта композиция есть сингулярный оператор с символом $\gamma_{n,m}\gamma_{q,m} Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\, Y_{q,m}^{(s)}(\theta)$. Но тогда первое слагаемое в (3) имеет символ $a_n^{(k)}(x)\, b_q^{(s)}(x)\, Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\, Y_{q,m}^{(s)}(\theta)$; сумма слагаемых такого рода образует отрезок C' ряда, представляющего оператор C, и очевидно, что норма остатка $C'' = C - C'$ сколь угодно мала. В то же время очевидно, что $A'B' = C' + T_3$, где вполне непрерывный оператор T_3 есть сумма вторых слагаемых выражения (3). Отсюда

$$AB = C + (A'B'' + A''B' + A''B'' - C'') + (AT_2 + T_1 B + T_3);$$

разность $AB - C$ есть сумма двух операторов, из которых один имеет сколь угодно малую норму, а другой вполне непрерывен. Отсюда следует, что разность $AB - C = T$ вполне непрерывна, и символы операторов AB и C совпадают, а это и значит, что символ произведения операторов A и B равен произведению символов этих операторов.

Рассуждая, как выше, мы точно так же докажем полную непрерывность разности $T' = BA - C$. Но тогда вполне непрерывна и разность $AB - BA = T - T'$. Теорема 1.33 доказана.

Замечание. Было бы желательно снизить число производных от символов, необходимое для доказательства теоремы 1.33.

§ 34. Сопряженный сингулярный оператор

Теорема 1.34. *Пусть A простейший сингулярный оператор, символ которого $\Phi(\theta)$ не зависит от полюса. Тогда A^* также есть простейший сингулярный оператор с символом $\overline{\Phi(\theta)}$.*

Действительно, $A = F^{-1}\Phi(\theta)F$, где F оператор преобразования Фурье. Так как $F^* = F^{-1}$, то

$$(Au, v) = \left(F^{-1}\Phi(\theta)Fu, v\right) = \left(u, F^{-1}\overline{\Phi(\theta)}Fv\right).$$

Отсюда $A^* = F^{-1}\overline{\Phi(\theta)}F$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.34. *Пусть A общий сингулярный оператор в $L_p(E_m)$, и его символ $\Phi(x, \theta)$ удовлетворяет следующим условиям:* 1) $\Phi(x, \theta) \hat{\in} W_2^{(l)}(S)$, где $l \geqslant \frac{m-1}{q} + 2$, $q = \min(p, p')$; 2) *символ непрерывен на римановой сфере равномерно по отношению к θ, иначе говоря, по данному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $\frac{r}{2}[(1 + x^2)(1 + y^2)]^{-\frac{1}{2}} < \delta$, то $|\Phi(y, \theta) - \Phi(x, \theta)| < \varepsilon$. Тогда оператор A^*, сопряженный с A, также есть общий сингулярный оператор с символом $\overline{\Phi(x, \theta)}$.*

Разложим символ в ряд по сферическим функциям

$$\Phi(x, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)}(x) Y_{n, m}^{(k)}(\theta).$$

Обозначим через $A_n^{(k)}$ простейший сингулярный оператор с символом $Y_{n, m}^{(k)}(\theta)$. Тогда

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)}(x) A_n^{(k)}+T, \tag{1}$$

причем ряд (1) сходится по норме $L_p(E_m)$. По теореме 1.34 $A_n^{(k)*}$ есть простейший сингулярный оператор с символом $\overline{Y_{n, m}^{(k)}(\theta)}$, поэтому

$$A^* u=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} A_n^{(k)*}\left(\overline{a_n^{(k)}} u\right)+T^* u=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{a_n^{(k)}(x)} A_n^{(k)*} u+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{E_m} \frac{\overline{a_n^{(k)}(y)}-\overline{a_n^{(k)}(x)}}{r^m} \frac{\overline{Y_{n, m}^{(k)}(\theta)}}{\gamma_{n, m}} u(y) d y+T^* u. \tag{2}$$

Первый ряд справа в (2) есть сингулярный оператор с символом $\overline{\Phi(x, \theta)}$; этот оператор ограничен в $L_{p'}(E_m)$. Каждый член второго ряда в (2) вполне непрерывен в $L_{p'}(E_m)$ в силу леммы 1.33; докажем, что этот ряд сходится по норме. Его сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} A_n^{(k)*}\left(\overline{a_n^{(k)}} u\right)-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{a_n^{(k)}(x)} A_n^{(k)*} u. \tag{3}$$

Уменьшаемое в (3) есть ряд операторов, сопряженных с операторами ряда (1), и из сходимости ряда (1) в норме $L_p(E_m)$ вытекает сходимость первого из рядов (3) в норме $L_{p'}(E_m)$. Вычитаемое в (3) есть разложение в ряд сингулярного оператора с символом $\overline{\Phi(x, \theta)}-\overline{a_1^{(0)}(x)}$; из условий теоремы вытекает, что этот ряд также сходится в норме $L_{p'}(E_m)$, и теорема доказана.

Замечание. Пусть символ $\Phi(x, \theta)$ общего сингулярного оператора A не удовлетворяет условиям теоремы 2.34, но он таков, что оператор A ограничен в $L_p(E_m)$. Напомним, что для этого достаточно, в силу результатов § 24 — 26, чтобы при $p=2$ символ и его смешанные производные по угловым координатам точки θ были непрерывны по θ и ограничены независимо от x, при $p<2$ $\Phi(x, \theta)\,\widehat{\in}\, W_2^{(l)}(S)$, $l \geqslant \frac{m-1}{p}+1$, и при $p \geqslant 2$ $\Phi(x, \theta)\,\widehat{\in}\, W_2^{(l)}(S)$, где $l \geqslant \frac{m+1}{2}$. Пусть символу $\Phi(x, \theta)$ соответствует внеинтегральный коэффициент $a(x)$ и характеристика $f(x, \theta)$, так что

$$Au = a(x)\,u(x) + \int\limits_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m}\, u(y)\, dy.$$

Раз оператор A ограничен, то существует сопряженный оператор A^*, также ограниченный; нетрудно видеть, что

$$A^*v = \overline{a(x)}\, v(x) + \int\limits_{E_m} \frac{\overline{f(y, -\theta)}}{r^m}\, v(y)\, dy.$$

Это можно представить в виде

$$A^*v = \overline{a(x)}\, v(x) + \int\limits_{E_m} \frac{\overline{f(x, -\theta)}}{r^m}\, v(y)\, dy + {}$$

$$+ \int\limits_{E_m} \frac{\overline{f(y, -\theta)} - \overline{f(x, -\theta)}}{r^m}\, v(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\Pi} \overline{\Phi(x, \theta)}\, d\mathscr{E}(\theta)\, v + \int\limits_{E_m} \frac{\overline{f(y, -\theta)} - \overline{f(x, -\theta)}}{r^m}\, v(y)\, dy.$$

Первый член справа есть сингулярный оператор с символом $\overline{\Phi(x, \theta)}$; условия теоремы 2.34 можно было бы ослабить, если бы были найдены более слабые условия полной непрерывности интегрального оператора

$$\int\limits_{E_m} \frac{\overline{f(y, -\theta)} - \overline{f(x, -\theta)}}{r^m}\, v(y)\, dy.$$

ГЛАВА VII

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 35. Случай, когда символ не зависит от полюса

Рассмотрим простейшее сингулярное уравнение вида

$$A_0 u = F^{-1}\Phi(\theta) F u = g(x). \tag{1}$$

Допустим, что $g(x) \in L_2(E_m)$. Примем еще, что символ $\Phi(\theta)$ почти всюду на сфере S конечен и точная нижняя граница его модуля положительна. Тогда функция $[\Phi(\theta)]^{-1}$ ограничена; по теореме 1.24 оператор $B_0 = F^{-1}[\Phi(\theta)]^{-1}F$ ограничен в $L_2(E_m)$. По правилу умножения символов $B_0 = A_0^{-1}$; уравнение (1) имеет решение, и притом единственное, в пространстве $L_2(E_m)$, и это решение выражается формулой

$$u = F^{-1}[\Phi(\theta)]^{-1} F g. \tag{2}$$

Более общее уравнение

$$F^{-1}\Phi(\theta) F u + T u = g(x), \tag{3}$$

в котором T — вполне непрерывный в $L_2(E_m)$ оператор, очевидным образом сводится к эквивалентному уравнению типа Риса — Шаудера

$$u + B_0 T u = B_0 g. \tag{4}$$

Уравнение (1) можно рассматривать и в пространстве $L_p(E_m)$, $1 < p < \infty$. В этом случае примем, что символ $[\Phi(\theta)]^{-1}$ оператора B_0 удовлетворяет еще условиям теоремы 1.26. Тогда оператор B_0 ограничен в $L_p(E_m)$; если $g \in L_p(E_m)$, то уравнение (1) имеет в этом пространстве единственное решение, определяемое формулой (2). Если еще оператор T вполне непрерывен в $L_p(E_m)$, то уравнение (3) сводится к эквивалентному уравнению типа Риса — Шаудера (4).

Допустим теперь, что $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем в любой конечной части пространства E_m. Нетрудно найти достаточные условия, которые следует наложить на характеристику $f(\theta)$ оператора A, чтобы решение уравнения (1) удовлетворяло аналогичному условию Липшица. Именно, пусть $f(\theta) \in W_2^{(l)}(S)$. По теореме 1.32 $\Phi(\theta) \in W_2^{\left[l+\frac{m}{2}\right]}(S)$; так как $\inf|\Phi(\theta)| > 0$, то и $[\Phi(\theta)]^{-1} \in W_2^{\left[l+\frac{m}{2}\right]}(S)$. Обозначая через $f_1(\theta)$ характеристику оператора A_0^{-1}, имеем по теореме 2.32 $f_1(\theta) \in W_2^{(l_1)}(S)$, где

$$l_1 = \left[\left[l + \frac{m}{2}\right] - \frac{m}{2}\right] = \begin{cases} l, & m \text{ четное,} \\ l-1, & m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В силу теорем вложения, если $l_1 > \frac{m+1}{2}$, то $f_1(\theta) \in C^{(1)}(S)$, а тогда, по теореме 1.6, функция (2) удовлетворяет условию Липшица. Таким образом, достаточно, чтобы

$$l \geqslant \frac{m}{2} + 1, \quad m \text{ четное,}$$
$$l \geqslant \frac{m+1}{2} + 2, \quad m \text{ нечетное.}$$

§ 36. Случай символа, зависящего от полюса. Регуляризация и области постоянства индекса

Рассмотрим общее сингулярное уравнение

$$Au = \int_{\Pi} \Phi(x, \theta)\, d\mathscr{E}(\theta)\, u + Tu = g(x), \quad g(x) \in L_p(E_m). \tag{1}$$

Будем считать, что символ $\Phi(x, \theta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.26, а также условиям теоремы 1.33, и что

$$\inf|\Phi(x, \theta)| > 0. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае оператор A допускает регуляризацию. В самом деле, пусть B — какой-нибудь сингулярный оператор с символом $\Phi^{-1}(x, \theta)$. Этот символ также удовлетворяет условиям упомянутых выше теорем; в силу теоремы 1.33, символ оператора BA равен единице. Но в таком случае $BA = I + T$, где I — тождественный, а T — вполне непрерывный в $L_p(E_m)$ операторы; отсюда следует, что B есть регуляризатор для оператора A.

Допустим еще, что символ $\Phi(x, \theta)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.34. Тогда оператор A^*, сопряженный с оператором A, также допускает регуляризацию: регуляризатором для него служит сингулярный оператор с символом $[\Phi(x, \theta)]^{-1}$. Теперь из результатов § 2 вытекает, что для уравнения (1) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.36. *Каждый из операторов A и A^* имеет только конечное число нулей.*

Теорема 2.36. *Оператор A нормально разрешим.*

Теорема 3.36. *Индекс оператора A не зависит от вполне непрерывного слагаемого T.*

Рассмотрим теперь зависящий от параметра λ оператор

$$A_\lambda u = u(x) - \lambda \int_{\Pi} \Phi(x, \theta)\, d\mathfrak{E}(\theta)\, u + Tu; \tag{3}$$

примем, что $\Phi(x, \theta)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, кроме, быть может, неравенства (2). В плоскости λ выделим множество σ, на котором символ оператора (3), равный $1 - \lambda\Phi(x, \theta)$, имеет равную нулю нижнюю грань модуля. Дополнительное к σ множество Δ есть сумма конечного или счетного множества областей: $\Delta = \bigcup \Delta_j$.

Теорема 4.36. *В каждой из областей Δ_j индекс оператора* (3) *остается постоянным.* [1])

Пусть δ_j — конечная замкнутая подобласть области Δ_j. В этой подобласти $\inf |1 - \lambda\Phi(x, \theta)| > 0$ и оператор (3) имеет регуляризатор B_λ, символ которого равен $[1 - \lambda\Phi(x, \theta)]^{-1}$.

Заменим λ на $\lambda + \Delta\lambda$; величину $\Delta\lambda$ выберем столь малой, чтобы было $(\lambda + \Delta\lambda) \in \delta_j$ и $|\Delta\lambda| \cdot \|B_\lambda\| \cdot \|C\| < 1$, где

$$Cu = \int_{\Pi} \Phi(x, \theta)\, d\mathfrak{E}(\theta)\, u.$$

[1]) См. статью автора [19]; для случая одномерного сингулярного уравнения аналогичные области введены в статьях автора [4, 5].

В силу следствия из теоремы 4.2 индексы операторов A_λ и $A_{\lambda+\Delta\lambda}$ равны. Таким образом, если точка λ вместе с некоторой своей достаточно малой окрестностью лежит в какой-либо из областей Δ_j, то в этой окрестности индекс оператора A постоянен. Из леммы Бореля вытекает это постоянство во всей области Δ_j.

§ 37. Эквивалентная регуляризация. Теорема об индексе

1°. Лемма 1.37. *Если* $\Phi(x, \theta)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.34 *и* $\sup|\Phi(x, \theta)| < 1$, *то индекс сингулярного оператора*

$$u(x) - \int\limits_\Pi \Phi(x, \theta)\, d\mathfrak{E}(\theta)\, u + Tu \tag{1}$$

равен нулю.

Рассмотрим зависящий от параметра λ оператор

$$u(x) - \lambda \int\limits_\Pi \Phi(x, \theta)\, d\mathfrak{E}(\theta)\, u + Tu. \tag{2}$$

Положим $\inf|\Phi(x, \theta)| = q$, $q < 1$. В круге $|\lambda| < q^{-1}$ символ оператора (2) удовлетворяет неравенству

$$\inf|1 - \lambda\Phi(x, \theta)| \geqslant 1 - |\lambda|\, q > 0.$$

По теореме 4.36 в указанном круге индекс оператора (2) постоянен. Но при $\lambda = 0$ его индекс равен нулю. Лемма доказана.

Лемма 2.37. Пусть сингулярный оператор A_t с символом $\Phi(x, \theta, t)$ зависит от параметра $t \in [0, 1]$, и пусть: 1) $\Phi(x, \theta, t) \hat{\in} W_2^{(l)}(S)$, где l такое же, как в теореме 2.34; 2) равномерно по отношению к x и t

$$\|\Phi(x, \theta, t + \Delta t) - \Phi(x, \theta, t)\|_{W_2^{(l)}(S)} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0;$$

3) если ξ — образ точки x на римановой сфере, то символ $\Phi(x, \theta, t)$ непрерывен по ξ и t равномерно относительно θ; 4) $\inf|\Phi(x, \theta, t)| > 0$. Тогда $\operatorname{Ind} A_t$ не зависит от t.

В силу теоремы 3.2 достаточно ограничиться случаем простейшего оператора A_t. Тогда A_t ограничен независимо от t и, равномерно по отношению к t, $\|A_{t+\Delta t} - A_t\| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$. Очевидно также, что $\|B_t\| \leqslant M$, где B_t — простейший сингулярный оператор с символом $[\Phi(x, \theta, t)]^{-1}$, а M — постоянная. Возьмем Δt столь малым, чтобы $\|A_{t+\Delta t} - A_t\| < M^{-1}$. По следствию из теоремы 3.2 $\operatorname{Ind} A_{t+\Delta t} = \operatorname{Ind} A_t$, что доказывает лемму.

2°. Теорема 1.37. *Если символ* $\Phi(x, \theta)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.34 *и неравенству* (2) § 36, *а также, при* $m > 3$, *условию* $\Phi(x, \theta) \hat{\in} W_2^{(m-1)}(S)$, *то уравнение*

$$Au = \int_{\Pi} \Phi(x, \theta)\, d\mathscr{E}(\theta)\, u + Tu = g(x) \tag{3}$$

допускает эквивалентную регуляризацию и его индекс равен нулю.

Доказательство мы подробно проведем для случаев $m = 2$ и $m = 3$; для общего случая доказательство аналогично, и мы его только наметим.

3°. Пусть $m = 2$. Символ в этом случае зависит, кроме x, только от одного угла ϑ, который меняется в пределах $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$. Непрерывность по точке θ и по угловой координате ϑ в данном случае совпадают; в частности, функция $e^{i\vartheta}$ бесконечно дифференцируема как функция точки единичной окружности. Напомним еще, что в силу результатов § 35 простейший сингулярный оператор h с символом $e^{i\vartheta}$ имеет ограниченный обратный оператор h^{-1} с символом $e^{-i\vartheta}$.

По условиям теоремы символ $\Phi(x, \theta) = \Phi(x, \vartheta)$ имеет квадратично суммируемую обобщенную производную $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2}$, причем

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} \right|^2 d\vartheta \leqslant C = \text{const}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что коэффициенты ряда

$$\Phi(x, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x)\, e^{in\vartheta} \tag{5}$$

во всяком случае удовлетворяют неравенству $|a_n(x)| \leqslant Cn^{-2}$, так что ряд (5) сходится абсолютно и равномерно по совокупности переменных x и ϑ. Обозначим

$$\tilde{\Phi}(x,\ \vartheta)=\sum_{k=-n}^{n} a_k(x)\, e^{ik\vartheta}$$

и возьмем n столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$|a_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |\Phi(x,\ \vartheta)-\tilde{\Phi}(x,\ \vartheta)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

где ε — произвольное достаточно малое положительное число. Положим теперь

$$\Phi_0(x,\ \vartheta)=\frac{2}{3}\,\varepsilon e^{in\vartheta}+\tilde{\Phi}(x,\ \vartheta); \tag{6}$$

тогда $\Phi_0(x,\ \vartheta)$ есть тригонометрический полином со следующими свойствами: коэффициент при $e^{in\vartheta}$, равный $\frac{2}{3}\varepsilon+a_n(x)$, по модулю больше $\frac{\varepsilon}{3}$, и

$$|\Phi(x,\ \vartheta)-\Phi_0(x,\ \vartheta)|<\varepsilon.$$

Обозначим через A_0 сингулярный оператор с символом $\Phi_0(x,\ \vartheta)$. Этот символ разлагается в произведение вида

$$\Phi_0(x,\ \vartheta)=\left[\frac{2}{3}\,\varepsilon+a_n(x)\right]e^{-in\vartheta}\prod_{k=1}^{2n}[\alpha_k(x)-e^{i\vartheta}].$$

На римановой сфере корни $\alpha_k(x)$ непрерывны, но в общем случае неоднозначны. Все они по модулю отличны от единицы, поэтому необходимо либо $\sup|\alpha_k(x)|<1$, либо $\inf|\alpha_k(x)|>1$. Корни первой группы обозначим через $\alpha'_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$, корни второй группы — через $\alpha''_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ \sigma$, $s+\sigma=2n$. Пусть еще

$$\prod_{k=1}^{s}\left[\alpha'_k(x)-e^{i\vartheta}\right]=\Phi'(x,e^{i\vartheta}),\quad \prod_{k=1}^{\sigma}\left[\alpha''_k(x)-e^{i\vartheta}\right]=\Phi''(x,e^{i\vartheta}). \tag{7}$$

Допустим, что точка x описывает на плоскости E_2 замкнутый контур. Символ $\Phi_0(x,\ \theta)$ однозначен и непрерывен, поэтому при таком обходе корни $\alpha_k(x)$ могут испытать только некоторую перестановку. При этом упомянутые корни не могут попасть на единичную окружность, поэтому будут переставляться между собой отдельно корни α'_k и отдельно корни α''_k. Отсюда следует, что полиномы Φ' и Φ'' однозначны как функции от x.

Положим теперь

$$\Phi(x, \theta, t) = \left[\frac{2}{3}\varepsilon + a_n(x)\right] e^{-in\vartheta} \prod_{k=1}^{s} \left[(1-t)\alpha'_k(x) - e^{i\vartheta}\right] \times \\ \times \prod_{k=1}^{\sigma} \left[\alpha''_k(x) - (1-t)e^{i\vartheta}\right] = \left[\frac{2}{3}\varepsilon + a_n(x)\right] \times \\ \times (1-t)^s e^{-in\vartheta} \Phi'\left(x, \frac{e^{i\vartheta}}{1-t}\right) \Phi''(x, (1-t)e^{i\vartheta}) \qquad (8)$$

и обозначим через A_t простейший сингулярный оператор с символом $\Phi(x, \theta, t)$; при $t=0$ мы получаем введенный выше оператор A_0. Оператор A_t удовлетворяет условиям леммы 2.37 и потому $\operatorname{Ind} A_0 = \operatorname{Ind} A_1$. Но

$$A_1 = (-1)^s \left[\frac{2}{3}\varepsilon + a_n(x)\right] \prod_{k=1}^{\sigma} \alpha''_k(x) \cdot h^{s-n}.$$

Отсюда легко видеть, что $\operatorname{Ind} A_1 = (s-n) \operatorname{Ind} h = 0$, так как операторы h и $h^* = h^{-1}$ не имеют нулей и, следовательно, $\operatorname{Ind} h = 0$. Окончательно, $\operatorname{Ind} A_0 = 0$.

Выберем ε столь малым, чтобы $\sup\left|\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_0}\right| < 1$. Разложению символа $\Phi = \Phi_0\left(1 - \frac{\Phi_0 - \Phi}{\Phi_0}\right)$ соответствует разложение $A = A_0(I - A_1) + T_2$, где A_1 — сингулярный оператор с символом $\frac{\Phi_0 - \Phi}{\Phi_0}$, а T_2 вполне непрерывен. Теперь

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} A_0 + \operatorname{Ind}(I - A_1) = 0;$$

первое слагаемое справа равно нулю по доказанному, второе — по лемме 1.37. Теперь из теоремы 5.2 следует, что оператор A допускает эквивалентную регуляризацию. Теорема 1.37 доказана для $m=2$.

4°. Обратимся к случаю $m=3$. В соответствии с условиями теоремы символ разлагается в ряд, который вместе с рядами первых и вторых производных сходится абсолютно и равномерно. Обозначим через $\tilde{\Phi}(x, \theta)$ отрезок этого ряда и выберем его так, чтобы $|\Phi(x, \theta) - \tilde{\Phi}(x, \theta)| < \varepsilon$, Точка θ на единичной сфере S определяется двумя угловыми координатами ϑ_1 и ϑ_2, $0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant \vartheta_2 \leqslant 2\pi$. Заметим, что на этот раз непрерывность относительно θ и непрерывность относительно угловых координат не совпадают. Точнее говоря, функция, зависящая только от ϑ_1 и непрерывная относительно этой переменной, непрерывна и относительно точки θ. Это делается неверным, если упомянутая функция зависит и от ϑ_2; так, функция $e^{i\vartheta_2}$ разрывна в полюсах сферы S. Важно, однако, что любой сферический полином непрерывен и бесконечно дифференцируем как функция точки θ; это относится, в частности, к произведениям $e^{\pm i\vartheta_2}\sin\vartheta_1$, которые суть сферические функции первого порядка.

5°. Рассмотрим сперва случай, когда символ Φ зависит только от x и от ϑ_1. Тогда сферический полином $\tilde{\Phi}(x, \theta)$ представляет собой сумму вида

$$\tilde{\Phi}(x, \theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) P_k(\cos\vartheta_1), \tag{9}$$

где P_k — полиномы Лежандра. Положим в данном случае $\Phi_0(x, \theta) = \tilde{\Phi}(x, \theta)$. Выражая полиномы Лежандра через степени $\cos\vartheta_1$, приведем выражение (9) к виду

$$\Phi_0(x, \theta) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x)\cos^k\vartheta_1. \tag{10}$$

Так как $|\Phi(x, \theta) - \Phi_0(x, \theta)| < \varepsilon$, то при ε достаточно малом будет $\inf|\Phi_0(x, \theta)| > 0$.

Пусть $\alpha_k(x)$ — корни полинома (10). Тогда

$$\Phi_0(x, \theta) = (-1)^n b_n(x) \prod_{k=1}^{n} [\alpha_k(x) - \cos\vartheta_1], \tag{11}$$

и так как $\inf|\Phi_0(x, \theta)| > 0$, то либо $\alpha_k(x)$ невещественно, либо $\inf|\alpha_k(x)| > 1$.

Формулу (11) можно преобразовать к виду

$$\Phi_0(x, \theta) = b_0(x) \prod_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{\cos\vartheta_1}{\alpha_k(x)}\right]. \tag{12}$$

Положим теперь

$$\Phi_0(x, \theta, t) = b_0(x) \prod_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{(1-t)\cos\vartheta_1}{a_k(x)}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (1-t)^k b_k(x) \cos^k \vartheta_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{12a}$$

и введем в рассмотрение простейший сингулярный оператор A_t с символом $\Phi_0(x, \theta, t)$. Очевидно, A_0 есть оператор с данным символом $\Phi_0(x, \theta)$, а A_1 есть оператор умножения на функцию $b_0(x)$. Докажем, что символ $\Phi_0(x, \theta, t)$ удовлетворяет условиям леммы 2.37. Из выражения (12a) ясно, что символ однозначен и непрерывен на римановой сфере, так как этими же свойствами обладают коэффициенты $b_k(x)$. Далее, как легко видеть, $\inf|\Phi_0(x, \theta, t)| > 0$. Удовлетворение остальным условиям леммы очевидно. Теперь $\operatorname{Ind} A_0 = \operatorname{Ind} A_1 = \operatorname{Ind} b_0(x) I = 0$, так как функция $b_0(x) = \Phi_0(x, \theta)|_{\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}}$ ограничена по модулю сверху и снизу положительными числами. Дальнейшие рассуждения проводятся, как и в случае $m = 2$, и приводят к тем же результатам.

6°. Рассмотрим теперь общий случай, когда символ зависит как от точки x, так и от обеих угловых координат ϑ_1 и ϑ_2. Как и выше, разложим символ $\Phi(x, \theta)$ в ряд по сферическим функциям; в силу условий теоремы этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Обозначим через $\Phi_0(x, \theta)$ отрезок этого ряда, удовлетворяющий неравенству

$$|\Phi(x, \theta) - \Phi_0(x, \theta)| < \varepsilon;$$

число ε выберем столь малым, чтобы было $\inf|\Phi_0(x, \theta)| > 0$. Через n обозначим порядок сферического полинома $\Phi_0(x, \theta)$.

В трехмерном пространстве сферическая функция $Y_{j,3}^{(k)}(\theta)$ только постоянным множителем отличается от выражения

$$P_j^{(k)}(\cos\vartheta_1)\, e^{\pm ik\vartheta_2};$$

напомним еще, что присоединенная функция Лежандра $P_j^{(k)}(\cos\vartheta_1)$ есть произведение $\sin^{|k|}\vartheta_1$ на полином степени $j-k$ относительно $\cos\vartheta_1$. Отсюда следует представление

$$\Phi_0(x, \theta) = \sum_{k=-n}^{n} b_k(x, \vartheta_1) \sin^{|k|}\vartheta_1 e^{ik\vartheta_2}, \tag{13}$$

в котором $b_k(x, \vartheta_1)$ суть полиномы относительно $\cos\vartheta_1$.

Положим[1])

$$e^{i\vartheta_2} = \frac{z+i}{z-i}. \tag{14}$$

Тогда

$$\Phi_0(x, \theta) = \frac{P(\vartheta_1, z)}{(z^2+1)^n}, \tag{15}$$

где

$$P(\vartheta_1, z) = \sum_{k=-n}^{n} b_k \sin^{|k|}\vartheta_1 (z+i)^{n+k}(z-i)^{n-k} \tag{16}$$

есть полином степени $2n$ относительно z. Важно заметить, что его старший коэффициент

$$p_0 = \sum_{k=-n}^{n} b_k \sin^{|k|}\vartheta_1 = \Phi_0(x, \theta)|_{\vartheta_2=0}$$

имеет положительную нижнюю грань модуля. Так как $\inf|\Phi_0(x, \theta)| > 0$, то полином $P(\vartheta_1, z)$ не имеет вещественных корней ни при каком вещественном ϑ_1. При $\vartheta_1 = 0$ полином

$$P(0, z) = b_0(x, 0)(z^2+1)^n$$

имеет n корней, равных $+i$ и расположенных в верхней полуплоскости , и n корней, равных $-i$ и расположенных в нижней полуплоскости. Так как при любом ϑ_1 полином $P(\vartheta_1, z)$ не имеет вещественных корней, то при любом же ϑ_1 этот полином имеет n корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в верхней полуплоскости и n корней $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ в нижней полуплоскости. Имеем

$$\Phi_0(x, \theta) = \frac{p_0}{(z^2+1)^n} \prod_{k=1}^{n} (z-\alpha_k)(z-\beta_k). \tag{17}$$

Но

$$z = i\frac{e^{i\vartheta_2}+1}{e^{i\vartheta_2}-1},$$

[1]) Преобразование (14), упрощающее последующие рассуждения, было указано автору М. З. Соломяком.

и отсюда получается после некоторых простых преобразований

$$\Phi_0(x,\ \theta)=\frac{p_0}{4^n}\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+i)(\beta_k-i)\times$$
$$\times\left(1-\frac{\alpha_k-i}{\alpha_k+i}e^{i\vartheta_2}\right)\left(1-\frac{\beta_k+i}{\beta_k-i}e^{-i\vartheta_2}\right). \quad (18)$$

Пусть ξ — образ точки x на римановой сфере. Корни α_k и β_k непрерывны, когда ξ пробегает риманову сферу, а θ — сферу S. Допустим пока, что эти корни достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по декартовым координатам точки θ.

Докажем, что символы

$$\Phi_1=\frac{p_0}{4^n},\qquad \Phi_2=\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k+i)(\beta_k-i),$$
$$\Phi_3=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha_k-i}{\alpha_k+i}e^{i\vartheta}\right),\qquad \Phi_4=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\beta_k+i}{\beta_k-i}e^{-i\vartheta_2}\right) \quad (19)$$

удовлетворяют условиям теоремы 1.37. Полином (16) не имеет вещественных корней, поэтому при обходе любого замкнутого контура в E_m корни α_k, так же как и корни β_k, могут испытать некоторую перестановку, но один в другой не переходит. Поэтому симметричные функции как корней α_k, так и корней β_k, однозначны и, очевидно, достаточное число раз дифференцируемы. В частности, таковы функции (19). Что функция Φ_1 не обращается в нуль, было отмечено выше; что же касается функций Φ_2, Φ_3, Φ_4, то они не обращаются в нуль потому, что $\operatorname{Im}\alpha_k>0$, $\operatorname{Im}\beta_k<0$ и, следовательно,

$$\operatorname{Im}(\alpha_k+i)>1,\ \operatorname{Im}(\beta_k-i)<-1,\ \left|\frac{\alpha_k-i}{\alpha_k+i}\right|<1,\ \left|\frac{\beta_k+i}{\beta_k-i}\right|<1.$$

Выполнение остальных условий очевидно. Отметим еще, что Φ_1 и Φ_2 не зависят от ϑ_2.

Если обозначить через $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ сингулярные операторы, соответствующие символам (19), то

$$\operatorname{Ind}A_0=\sum_{k=1}^{4}\operatorname{Ind}A^{(k)}=\operatorname{Ind}A^{(3)}+\operatorname{Ind}A^{(4)},$$

так как $\operatorname{Ind}A^{(1)}=\operatorname{Ind}A^{(2)}=0$ в силу доказанного в п. 5°.

Докажем, что $\operatorname{Ind} A^{(3)} = \operatorname{Ind} A^{(4)} = 0$, для чего рассмотрим символ

$$\Phi_3(x, \theta, t) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_k - i}{\alpha_k + i} te^{i\vartheta_2}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

и соответствующий ему сингулярный оператор $A_t^{(3)}$. Очевидно, $A_0^{(3)} = I$, $A_1^{(3)} = A^{(3)}$. Символ $\Phi_3(x, \theta, t)$ удовлетворяет условиям леммы 2.37, поэтому $\operatorname{Ind} A_1^{(3)} = \operatorname{Ind} A_0^{(3)}$, или $\operatorname{Ind} A^{(3)} = \operatorname{Ind} I = 0$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{Ind} A^{(4)} = 0$. Отсюда $\operatorname{Ind} A_0 = 0$.

Пусть теперь функции α_k и β_k не имеют достаточного числа производных по координатам точки θ. Отобразим пространство E_3 на риманову сферу Σ. Функции Φ_j непрерывны на замкнутом компактном множестве $\Sigma \times S$; аппроксимируем их равномерно функциями Φ_j', непрерывными на $\Sigma \times S$ и обладающими достаточно большим количеством непрерывных производных по декартовым координатам точки θ. Положим теперь

$$\Phi_1'(x, \theta) = \Phi_0(x, \theta) - \Phi_0'(x, \theta),$$

$$\Phi_0'(x, \theta) = \prod_{j=1}^{4} \Phi_j'(x, \theta).$$

Аппроксимацию возьмем настолько точной, чтобы

$$\sup \left| \frac{\Phi_1'(x, \theta)}{\Phi_0'(x, \theta)} \right| < 1.$$

Пусть A_0' — сингулярный оператор с символом Φ_0'. Повторяя рассуждения конца пункта 2°, найдем, что $\operatorname{Ind} A_0 = \operatorname{Ind} A_0' = 0$. Дальнейшее протекает так же, как в уже разобранных случаях, и приводит к тем же результатам.

7°. Коротко остановимся на случае произвольного m. Символ $\Phi(x, \theta)$ разложим в ряд по сферическим функциям. Этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Построим отрезок $\Phi_0(x, \theta)$ упомянутого ряда так, чтобы было $|\Phi(x, \theta) - \Phi_0(x, \theta)| < \varepsilon$, и пусть n — порядок сферического полинома $\Phi_0(x, \theta)$. Число ε выберем так, чтобы было $\inf |\Phi_0(x, \theta)| > 0$. Очевидно, $\Phi_0(x, \theta)$ можно представить в виде суммы произведений сферических полиномов первого порядка

$$\begin{gathered}\cos\vartheta_1,\ \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2,\ \ldots,\\ \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ \ldots\ \sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1},\\ \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ \ldots\ \sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}.\end{gathered}$$

Но тогда можно $\Phi_0(x, \theta)$ представить в виде полинома, расположенного по степеням любой из сферических функций первого порядка; степень такого полинома не превосходит n.

Может случиться, что символ $\Phi(x, \theta)$ зависит только от x и ϑ_1. Тогда $\Phi_0(x, \theta)$ также зависит только от x и ϑ_1 и представляет собой полином относительно $\cos\vartheta_1$:

$$\Phi_0(x, \theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\cos^k\vartheta_1,$$

причем

$$\inf|a_0| = \inf|\Phi_0(x, \theta)|_{\vartheta_1=\frac{\pi}{2}} > 0.$$

Дальнейшее протекает так же, как в п. 5°, и приводит к доказательству теоремы.

Допустим теперь, что теорема доказана для символа, зависящего только от точки x и углов $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{k-1}$; докажем, что она верна и для символа, зависящего еще и от угла ϑ_k. Доказательство различно для случаев $k < m-1$ и $k = m-1$. Пусть $k < m-1$. Разложим $\Phi_0(x, \theta)$ по степеням сферической функции первого порядка

$$s = \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ \ldots\ \sin\vartheta_{k-1}\cos\vartheta_k.$$

Обозначим через N степень полинома Φ_0 относительно s, так что

$$\Phi_0(x, \theta) = \sum_{j=0}^{N} a_j(x, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{k-1})s^j. \tag{20}$$

Существенно, что

$$\inf|a_0| = \inf|\Phi_0(x, \theta)|_{\vartheta_k=\frac{\pi}{2}} > 0.$$

Пусть α_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ — корни полинома (20). Тогда

$$\Phi_0(x, \theta) = a_0(x, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{k-1})\prod_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{s}{\alpha_j}\right);$$

очевидно, либо α_j невещественно, либо $\sup\left|\frac{s}{\alpha_j}\right| < 1$.

Обозначим через A_0 сингулярный оператор с символом $\Phi_0(x, \theta)$. Полагая

$$\Phi_0(x, \theta, t) = a_0(x, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{k-1}) \times \prod_{j=1}^{n} \left(1 - (1-t)\frac{s}{\alpha_j}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

и используя лемму 2.37, найдем, что $\operatorname{Ind} A_0 = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $k = m - 1$. Выделим сферические функции $se^{i\varphi}$ и $se^{-i\varphi}$, где положено

$$s = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \ldots \sin\vartheta_{m-2}, \quad \varphi = \vartheta_{m-1}.$$

Собирая члены, содержащие степени этих функций, мы приведем $\Phi_0(x, \theta)$ к виду

$$\Phi_0(x, \theta) = \sum_{k=-n}^{n} b_k(x, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-2}) s^{|k|} e^{ik\varphi}. \tag{21}$$

Полагаем

$$e^{i\varphi} = \frac{z+i}{z-i};$$

дальнейшие рассуждения протекают так же, как в п. 6°, и приводят к полному доказательству теоремы 1.37.

Замечание 1. Из теоремы 1.37 вытекает, что для многомерного сингулярного интегрального уравнения, символ которого удовлетворяет условиям этой теоремы, имеет место альтернатива Фредгольма.

Замечание 2. Если символ сингулярного оператора разрывен, то его индекс может оказаться отличным от нуля. Для доказательства воспользуемся замечанием И. А. Ицковича [3], по которому одномерный сингулярный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)\,dt}{t-x}, \quad -\infty < x < \infty,$$

можно рассматривать как многомерный интеграл с характеристикой, содержащей δ-функцию Дирака. Так, например,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t, y)}{t-x}\,dt = \int\int_{E_2} \frac{\delta(\theta) - \delta(\theta+\pi)}{r^2} u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{22}$$

где $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$ и θ — полярный угол точки (ξ, η) относительно полюса (x, y). Преобразование Фурье интеграла (22) легко вычисляется; оно равно $\pi i\tilde{u}(p, q)\operatorname{sign} p$, где $\tilde{u}(p, q)$ — преобразование Фурье функции $u(x, y)$. Отсюда ясно, что символ двумерного интеграла (22) равен

$$\pi i \operatorname{sign} p = \pi i \operatorname{sign} \cos\theta.$$

Рассмотрим теперь оператор

$$Au = a(x)u(x, y) - \frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t, y)}{t-x}\,dt =$$

$$= a(x)u(x, y) - \frac{b(x)}{\pi i}\iint_{E_2}\frac{\delta(\theta)-\delta(\theta+\pi)}{r^2}\,u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

символ которого равен $a(x) - b(x)\operatorname{sign}\cos\theta$ и, следовательно, разрывен при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$; функции $a(x)$ и $b(x)$ подчиним ограничениям, обычным в теории одномерных сингулярных уравнений. Допустим для определенности, что индекс оператора A, рассматриваемого как оператор в $L_2(-\infty, +\infty)$, равен единице. Тогда уравнение

$$a(x)u(x) - \frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)}{t-x}\,dt = 0$$

имеет в $L_2(-\infty, +\infty)$ одно линейно независимое решение, которое мы обозначим через $u_1(x)$; сопряженное уравнение имеет только нулевое решение. В таком случае оператор A имеет в пространстве $L_2(E_2)$ бесконечно много нулей; все они имеют вид $u_1(x)v(y)$, где функция $v(y)$ подчинена единственному условию $v(y) \in L_2(-\infty, +\infty)$; в том же пространстве $L_2(E_2)$ сопряженный оператор A^* не имеет нулей. Из сказанного следует, что в пространстве $L_2(E_2)$

$$\operatorname{Ind} A = +\infty.$$

Замечание 3. Было бы интересно исследовать сингулярные уравнения в пространствах $L_p(q, E_m)$, где вес q может обращаться в нуль или в бесконечность, а также в пространствах Орлича. Желательно также изучить сингулярные уравнения с разрывными (в частности, с кусочно непрерывными) символами, установить условия возможности регуляризации таких уравнений и вычислить их индекс. Наконец, представляет интерес исследовать сингулярные уравнения в обобщенных функциях.

§ 38. Уравнения с интегралом, распространенным по замкнутому многообразию

Рассмотрим случай, когда сингулярный интеграл распространен не по евклидову пространству, а по произвольному замкнутому m-мерному ляпуновскому многообразию Γ, которое подчиним условиям Жиро [1] (см. также § 1 этой книги): многообразие Γ — ориентируемое; его можно покрыть конечным числом частично налегающих друг на друга частей Γ_j, каждая из которых допускает гладкое взаимно однозначное отображение на некоторую конечную область m-мерного евклидова пространства E_m. Пусть символ $\Phi(x, \theta)$ данного уравнения удовлетворяет следующим условиям: а) $\Phi(x, \theta) \hat{\in} W_2^{(l)}(S)$, где число l такое же, как в теореме 2.34; б) как функция точки x символ непрерывен на Γ равномерно относительно θ. Тогда все доказательства, а с ними и все результаты § 36 сохраняют силу. В частности, уравнения рассматриваемого типа нормально разрешимы и имеют конечный индекс.

Обратимся к теореме 1.37. Ее доказательство, данное в § 37, теряет силу в случае интегрирования по произвольному многообразию, так как на многообразии не всегда можно ввести правильную координатную сетку и потому не всегда возможно представление символа через угловые координаты точки θ, пригодное сразу на всем многообразии.

Теорема 1.37 не доказана для произвольного многообразия упомянутого выше типа. [1]) В настоящем параграфе мы дадим ее доказательство в случае $m = 2$. [2]) Будут указаны также два случая, когда теорему 1.37 удается доказать для многообразия с числом измерений $m \geqslant 3$. Другого характера случай будет приведен в § 39.

---

1) Примечание в корректуре. В недавно появившейся статье Р. Сили [2] доказано, что в случае многообразия любого числа измерений уравнение с необращающимся в нуль бесконечно дифференцируемым символом допускает эквивалентную регуляризацию. Используя теоремы 5.2 и 2.34, можно доказать теперь, что индекс такого уравнения равен нулю (в статье [2] Р. Сили доказательство этого утверждения проведено не вполне отчетливо).

2) В относящихся к этому случаю (см. п. а)) рассуждениях использована конструкция, предложенная М. З. Соломяком [1].

Для случая $m=2$ рассуждения различны в зависимости от того, гомеоморфна поверхность Γ тору или нет.

а) Поверхность Γ не гомеоморфна тору. В этом случае на Γ не существует правильной координатной сетки. Для дальнейшего нам понадобится формула, характеризующая преобразование символа при повороте местной системы координат; эту формулу можно получить из общих результатов § 21, но проще получить ее непосредственно. Пусть x'_1, x'_2 оси новой координатной системы, образующие со старыми осями угол α. Тогда, очевидно, характеристика $f'(x, \theta')$ в новой системе координат связана с характеристикой $f(x, \theta)$ в старой системе соотношением $f'(x, \theta')= =f(x, \theta'+\alpha)$. Из формул (2) и (6) § 12 вытекает искомое соотношение между символами:

$$\Phi'(x, \theta')=\Phi(x, \theta'+\alpha). \tag{1}$$

С каждой точкой $x\in\Gamma$ свяжем некоторую, вполне определенную, местную систему координат. В этой системе символ $\Phi(x, \theta)$ есть вполне определенная функция точки x и угла θ. Разложим эту функцию в ряд Фурье:

$$\Phi(x, \theta)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(x)\, e^{ik\theta};$$

из условий теоремы 1.37 вытекает, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Подберем такое натуральное n, чтобы

$$\sum_{|k|>n} |a_k(x)|<\varepsilon, \tag{2}$$

где $\varepsilon<\inf|\Phi(x, \theta)|$. Обозначим далее

$$\Phi_0(x, \theta)=\sum_{k=-n}^{n} a_k(x)\, e^{ik\theta}.$$

Очевидно,

$$\inf|\Phi_0(x, \theta)|>0. \tag{3}$$

Положим

$$e^{i\theta}=\frac{z+i}{z-i}. \tag{4}$$

Тогда

$$\Phi_0(x,\ \theta)=\frac{P(x,\ z)}{(z^2+1)^n},$$

где

$$P(x,\ z)=\sum_{k=-n}^{n} a_k(x)(z+i)^{n+k}(z-i)^{n-k}. \tag{5}$$

Из неравенства (3) следует, что полином $P(x,\ z)$ не имеет вещественных корней. Заметим еще, что старший коэффициент полинома (5) равен

$$p_0(x)=\sum_{k=-n}^{n} a_k(x)=\Phi_0(x,\ 0)$$

и, следовательно, сам удовлетворяет неравенству (3).

Корни полинома (5) обозначим через $z_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, 2n$. Полином $P(x,\ z)$ разлагается в произведение

$$P(x,\ z)=p_0(x)\prod_{k=1}^{2n}[z-z_k(x)]; \tag{6}$$

очевидно, коэффициент $p_0(x)$ непрерывен на Γ.

Выясним, как изменяется формула (6) при повороте местных осей координат. Пусть эти оси повернуты на угол α. Значение θ в новой системе координат будем обозначать через θ', так что $\theta \doteq \theta'+\alpha$. Вообще, штрихом будем обозначать величины, вычисленные в новой системе координат. Из формулы (4) легко вытекает, что

$$z'=\frac{z\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-z\sin\frac{\alpha}{2}}; \tag{7}$$

аналогично меняются корни $z_k(x)$:

$$z'_k(x)=\frac{z_k(x)\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-z_k(x)\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{8}$$

Далее, из равенства (1) вытекает формула, которая будет использована ниже:

$$p_0'(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(x)\, e^{ik\alpha}. \tag{9}$$

Запишем формулу (1) в виде

$$\frac{P'(x,\, z')}{(z'^2+1)^n} = \frac{P(x,\, z)}{(z^2+1)^n},$$

или, по формуле (6),

$$\frac{p_0'(x)\prod\limits_{k=1}^{2n}\left[z' - z_k'(x)\right]}{(z'^2+1)^n} = \frac{p_0(x)\prod\limits_{k=1}^{2n}\left[z - z_k(x)\right]}{(z^2+1)^n}. \tag{10}$$

Выразив z и $z_k(x)$ через z' и $z_k'(x)$ соответственно, найдем из формулы (10), что выражение

$$p_0'(x)\prod_{k=1}^{2n}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + z_k'(x)\sin\frac{\alpha}{2}\right] \tag{11}$$

не зависит от выбора осей координат. Отсюда, в частности, следует, что

$$p_0'(x) = \frac{p_0(x)}{\prod\limits_{k=1}^{2n}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + z_k'(x)\sin\frac{\alpha}{2}\right]}.$$

Пусть параметр t меняется в пределах $0 \leqslant t \leqslant 1$. Положим

$$z_k(x,\, t) = \frac{(2-t)\, z_k(x) \pm it}{\pm\frac{t}{i} z_k(x) + (2-t)}; \tag{12}$$

знак в формуле (12) будем брать совпадающим со знаком величины $\operatorname{Im} z_k(x)$. Очевидно, $z_k(x,\, 0) = z_k(x)$; $z_k(x,\, 1) = \pm i$; легко также проверить, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ корни $z_k(x,\, t)$ невещественны. Заметим еще, что формула (12) инвариантна относительно поворота координатных осей.

Введем в рассмотрение полином $P(x, z, t)$, который в любой местной системе координат определяется формулой

$$P'(x, z', t) = p_0'(x, t) \prod_{k=1}^{2n} [z' - z_k'(x, t)], \tag{13}$$

где

$$p_0'(x, t) = \frac{p_0(x)}{\prod\limits_{k=1}^{2n} \left[\cos\frac{\alpha}{2} + z_k'(x, t) \sin\frac{\alpha}{2}\right]}. \tag{14}$$

Докажем, что полином (13) непрерывен как функция от x и t. Непрерывность по t очевидна, а непрерывность по x сводится к однозначности, которую мы и докажем.

Пусть точка x описывает на Γ замкнутый контур. При его обходе полином (5) возвращается к исходному значению, поэтому корни этого полинома могут только испытать некоторую перестановку, при которой, однако, корни не переходят из верхней полуплоскости в нижнюю и обратно, потому что полином (5) не имеет вещественных корней. То же верно и для корней (12), но тогда, как это видно из формул (13) и (14), при обходе замкнутого контура на Γ полином (13) возвращается к исходному значению.

Таким образом, удалось построить полином (13), не имеющий вещественных корней, непрерывно зависящий от параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и совпадающий при $t=0$ с полиномом $P(x, z)$, а при $t=1$ — с полиномом вида

$$Q(x, z) = b_0(x) e^{i\gamma(x)} (z - i)^s (z + i)^{2n-s}, \quad \inf b_0(x) > 0; \tag{15}$$

здесь s — число корней полинома (5), лежащих в верхней полуплоскости.

Формула (9) показывает, что при повороте системы координат на угол α функция $\gamma(x)$ приобретает приращение, равное $(n-s)\alpha$. Отсюда видно, что если $n \neq s$, то направления, составляющие с осью x_1 угол

$$\omega_j(x) = \frac{2\pi j - \gamma(x)}{n-s}, \quad j = 0, 1, \ldots, |n-s| - 1,$$

инвариантны относительно поворота координатных осей. Тем самым на поверхности Γ определено $|n-s|$-значное поле касательных направлений, непрерывно зависящее от точки

$x \in \Gamma$. Накроем Γ многолистной поверхностью $\widetilde{\Gamma}$, на которой упомянутое поле однозначно; так как исходная поверхность Γ не гомеоморфна тору, то и накрывающая поверхность $\widetilde{\Gamma}$ ему не гомеоморфна.[1])

Известно, однако, что на замкнутых поверхностях, не гомеоморфных тору, не существует непрерывного поля касательных направлений[2]); мы приходим, таким образом, к противоречию с предположением, по которому $s \neq n$.

Теперь $s = n$ и полином (15) имеет вид

$$Q(x, z) = b_0(x)\, e^{i\gamma(x)} (z^2 + 1)^n.$$

Ему соответствует символ

$$\widetilde{\Phi}_0(x, \theta) = b_0(x)\, e^{i\gamma(x)}$$

и сингулярный оператор

$$\widetilde{A}_0 = b_0(x)\, e^{i\gamma(x)} (I + T), \tag{16}$$

в котором слагаемое T вполне непрерывно в $L_p(\Gamma)$.

Таким образом, оператор A_0, символ которого равен $\Phi_0(x, \theta)$, соединен параметром с оператором (16), индекс которого равен нулю. Согласно лемме 2.37, индекс оператора A_0 равен нулю. Теперь остается повторить соответствующие рассуждения § 37, и теорема 1.37 будет доказана для рассматриваемого случая.

б) Поверхность, гомеоморфная тору. В этом случае сохраняют силу рассуждения, проведенные в п. а), вплоть до построения полинома (15). В данном случае нельзя, однако, утверждать, что $s = n$, и дальнейшие рассуждения мы проведем по-иному.

Очевидно,

$$Q(x, z) = b_0(x)\, e^{i\gamma(x)} (z^2 + 1)^n e^{i(n-s)\theta};$$

этому соответствует символ

$$b_0(x)\, e^{i\gamma(x)} e^{i(n-s)\theta}.$$

Достаточно доказать, что соответствующий этому символу оператор имеет нулевой индекс; для этого достаточно,

---

[1]) См., например, Г. Зейферт и В. Трельфалль [1].

[2]) См. П. Александров и Х. Хопф [1], гл. XIV, § 4, стр. 552.

в свою очередь, доказать, что индекс оператора с символом $e^{i\theta}$ равен нулю.

Положение точки x на поверхности Γ определяется двумя параметрами φ и ψ; можно считать, что координатные линии ортогональны. Обозначим через x_1, x_2 соответствующие местные декартовы координаты.

Пусть q — сингулярный оператор с символом $e^{i\theta}$. В сингулярном интегральном уравнении $qu=0$ сделаем замену независимых переменных $\varphi=\tilde{\varphi}$, $\psi=-\tilde{\psi}$ и замену неизвестной функции $u(\varphi, \psi)=v(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$. Такая замена не меняет индекса уравнения. В то же время она приводит к замене θ на $-\theta$ и, следовательно, к замене $e^{i\theta}$ на $e^{-i\theta}$. Отсюда следует, что операторы с символами $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$ имеют общий индекс. Но $e^{-i\theta}$ есть символ оператора q^*, сопряженного с q. Отсюда

$$\operatorname{Ind} q=\operatorname{Ind} q^*=-\operatorname{Ind} q$$

и, следовательно, $\operatorname{Ind} q=0$.

Для поверхности, гомеоморфной тору, можно привести еще одно доказательство (его идея принадлежит И. А. Ицковичу [1]), которое кажется нам нелишенным интереса.

Примем, что координатные линии $\varphi=\text{const}$ и $\psi=\text{const}$ ортогональны. В каждой точке поверхности введем местную систему координат x_1, x_2. Символ оператора

$$qu=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} u(y)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{1}{r}\,d\Gamma_y \tag{17}$$

равен $e^{i\theta}$. Найдем нули этого оператора.

Функция u, вообще говоря, комплекснозначна; положим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} u(y)\frac{d\Gamma_y}{r}=v_1(x)+iv_2(x). \tag{18}$$

Уравнение $qu=0$ легко приводится к системе уравнений для v_1 и v_2, из которой вытекает, что $\Delta_2 v_j=0$, где Δ_2 — второй дифференциальный параметр Бельтрами поверхности Γ. Применяя теперь к функции v_j обобщенную формулу Грина (см. В. Бляшке [1], стр. 191—192), легко доказать, что $v_1+iv_2=\text{const}$. Но тогда из (18) вытекает, что $u(x)=$ $=cu_0(x)$, где $u_0(x)$ — единственное линейно независимое решение так называемой задачи Робена для поверхности Γ; отсюда видно, что оператор q имеет один нуль.

Сопряженный с q оператор q^*, символ которого равен $e^{-i\vartheta}$, имеет вид

$$q^*u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} u(y)\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - i\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\frac{1}{r}\,d\Gamma_y;$$

применяя обобщенную формулу Грина, легко доказать, что $q^*1 = 0$.

Докажем, что оператор $q_1 u = qu - \int\limits_{\Gamma} u(y)\,d\Gamma_y = qu - C$ не имеет нулей. Пусть $q_1 u = 0$, или $qu = C$. Для разрешимости последнего уравнения необходимо, чтобы $(C, 1) = 0$. Отсюда $C = 0$, $qu = 0$ и $u = c_0 u_0(x)$. Но, как известно, $\int\limits_{\Gamma} u_0(y)\,d\Gamma_y \neq 0$; отсюда $c_0 = 0$, что и требовалось доказать.

По правилу умножения символов $q_1 q^* = I + T$ и, так как q_1 не имеет нулей, то q^* допускает эквивалентную регуляризацию. По теореме 5.2, $\operatorname{Ind} q^* \geqslant 0$.

Исходя из оператора, который получается заменой в интеграле (17) знака $+$ на $-$, и повторяя предшествующие рассуждения, найдем, что $\operatorname{Ind} q \geqslant 0$; так как индексы сопряженных операторов различаются знаком, то $\operatorname{Ind} q = 0$.

в) $m \geqslant 3$. Если рассматриваемое многообразие гомеоморфно сфере, то отобразим его на сферу, которую потом стереографически отобразим на евклидово пространство E_m. Указанные преобразования не меняют индекса, но в случае интегрирования по E_m теорема 1.37 верна, поэтому она верна и для любого многообразия, гомеоморфного сфере.

Теорему 1.37 легко доказать и тогда, когда на многообразии можно ввести правильную координатную сетку — в этом случае сохраняют силу рассуждения § 37.

§ 39. Продолжение по параметру [1]

В предшествующих параграфах было доказано, что индекс сингулярного уравнения с символом, удовлетворяющим условиям теоремы 2.34 и положительно ограниченным снизу по модулю, равен нулю. Здесь мы дадим еще одно

[1]) См. заметку автора [25].

доказательство этого утверждения; оно требует дополнительных ограничений на символ, но зато пригодно для любого многообразия, удовлетворяющего условиям § 38.

Пусть дано сингулярное уравнение

$$Au + Tu = g(x), \quad g(x) \in L_p(\Gamma), \tag{1}$$

где A — сингулярный оператор, символ $\Phi(x, \theta)$ которого непрерывен на Γ по x равномерно относительно θ (если $\Gamma = E_m$, то потребуем равномерной непрерывности на римановой сфере); пусть еще $\Phi(x, \theta) \hat{\in} W_2^{(l)}(S)$, где l такое же, как в теореме 2.34. Наложим на символ еще одно существенное ограничение: допустим, что в плоскости комплексной переменной ζ можно провести гладкую кривую L, соединяющую точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ и не имеющую общих точек с множеством значений символа. Это множество замкнуто, так как символ непрерывен на компактном замкнутом множестве $\Sigma \times S$, где Σ — риманова сфера, поэтому найдется такая постоянная $\beta > 0$, что

$$|\Phi(x, \theta) - \zeta| \geqslant \beta, \quad \zeta \in L. \tag{2}$$

Пусть $\tilde{L}$ — кривая, в которую переходит кривая L при преобразовании $\zeta = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$. Кривую L, если она существует, всегда можно провести так, чтобы она не проходила через точку $\zeta = 1$. Мы вправе поэтому считать, что $\tilde{L}$ — кривая ограниченная; ее концы суть $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Рассмотрим сингулярное уравнение

$$u - \lambda(u - Au) + Tu = g(x), \quad \lambda \in \tilde{L}. \tag{3}$$

Докажем, что символ уравнения (3) по модулю ограничен снизу положительным числом, которое не зависит от λ. Символ уравнения (3) равен $1 - \lambda + \lambda\Phi$. По неравенству (2) при $\lambda \in \tilde{L}$

$$\beta \leqslant \left| \Phi - \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right| = \frac{|1 - \lambda + \lambda\Phi|}{|\lambda|}.$$

Символ Φ ограничен; пусть $|1 - \Phi| \leqslant K = \text{const}$. Если $|\lambda| \geqslant \frac{1}{2K}$, то $|1 - \lambda + \lambda\Phi| \geqslant \frac{\beta}{2K}$; если же $|\lambda| < \frac{1}{2K}$, то

$|1-\lambda+\lambda\Phi|>1-|\lambda|K>\frac{1}{2}$. Теперь из леммы 2.37 вытекает, что $\operatorname{Ind}(I-\lambda(I-A))$ не зависит от λ. Полагая $\lambda=0$ и $\lambda=1$, найдем, что $\operatorname{Ind} A=\operatorname{Ind} I=0$.

В рассматриваемом случае можно также дать простой способ эквивалентной регуляризации уравнения (1). Выше было доказано, что $\inf|1-\lambda+\lambda\Phi|>0$. Отсюда вытекает следующее: если $\lambda\in\tilde{L}$, то сингулярный оператор

$$H_\lambda u=\int_{\text{П}}\frac{1-\Phi(x,\theta)}{1-\lambda+\lambda\Phi(x,\theta)}\,d\mathscr{E}(\theta)\,u,$$

символ которого равен

$$\frac{1-\Phi(x,\theta)}{1-\lambda+\lambda\Phi(x,\theta)},$$

ограничен по норме некоторой постоянной C, которая не зависит от λ.

Полагая $\lambda=0$, найдем, что $\|I-A\|\leqslant C$, поэтому, если $|\lambda_0|\leqslant\frac{1}{2C}$, то оператор $[I-\lambda_0(I-A)]^{-1}$ определен на всем пространстве $L_p(E_m)$ и ограничен, его символ равен $(1-\lambda_0+\lambda_0\Phi)^{-1}$. Умножив слева обе части уравнения (3) на упомянутый оператор, мы придем к равносильному уравнению с символом

$$\frac{1-\lambda+\lambda\Phi}{1-\lambda_0+\lambda_0\Phi}=1-\frac{(\lambda-\lambda_0)(1-\Phi)}{1-\lambda_0+\lambda_0\Phi}.$$

Обе части нового уравнения умножим слева на оператор $[I-(\lambda_1-\lambda_0)H_{\lambda_0}]^{-1}$, где $|\lambda_1-\lambda_0|\leqslant\frac{1}{2C}$, что в свою очередь приведет нас к уравнению с символом

$$1-\frac{(\lambda-\lambda_1)(1-\Phi)}{1-\lambda_1+\lambda_1\Phi},$$

равносильному уравнению (3). Продолжая этот процесс, мы в интересующем нас случае $\lambda=1$ после k шагов получим уравнение с символом

$$1-\frac{(1-\lambda_k)(1-\Phi)}{1-\lambda_k+\lambda_k\Phi}.$$

При k достаточно большом можно сделать $\lambda_k=1$, и мы приходим к уравнению с символом единица, что и требовалось; по построению, последнее уравнение равносильно уравнению (1).

Если $p=2$, то предположение о существовании кривой L не необходимо: уравнение (1) можно в этом случае свести к эквивалентному уравнению Риса — Шаудера, предполагая только его разрешимость; разумеется мы сохраняем при этом предположения $\Phi \,\hat{\in}\, W_2^{(l)}(S)$ и $\inf|\Phi| > 0$. Действительно, если уравнение (1) разрешимо, то по теореме 6.2 оно равносильно уравнению

$$(A^* + T^*)(A + T)\,u = (A^* + T^*)\,g. \tag{4}$$

Символ уравнения (4) равен $|\Phi(x,\ \theta)|^2$; значения этого символа расположены на вещественно положительной полуоси, поэтому к уравнению (4) можно применить описанный выше прием продолжения по параметру, взяв за линию L отрицательную вещественную полуось. Таким образом мы приведем уравнение (4), а с ним и уравнение (1), к эквивалентному уравнению Риса — Шаудера. Заметим только, что такое сведение не есть эквивалентная регуляризация, так как уравнение Риса — Шаудера, о котором только что было сказано, эквивалентно уравнению (1) лишь при тех правых частях, при которых уравнение (1) разрешимо. Если же это уравнение неразрешимо, то оно неэквивалентно уравнению (4), так как это последнее всегда разрешимо. В самом деле, самосопряженный сингулярный оператор $(A^*+T^*)(A+T)$ нормально разрешим, и для разрешимости уравнения (4) достаточно, чтобы

$$((A^* + T^*)\,g,\ \psi) = 0, \tag{5}$$

где ψ — любое решение уравнения $(A^*+T^*)(A+T)\psi = 0$ или, что то же, в силу теоремы 6.2, уравнения $(A+T)\psi = 0$. Но условие (5) всегда выполнено, потому что

$$((A^* + T^*)\,g,\ \psi) = (g,\ (A + T)\,\psi) = 0.$$

Если кривая L не существует, то, как мы сейчас увидим, эквивалентная регуляризация методом продолжения по параметру, вообще говоря, невозможна. Заметим, что для установления возможности продолжения по параметру мы использовали следующие факты, связанные с понятием символа: 1) каждому оператору некоторого класса приводится в соответствие функция, именуемая символом этого оператора; 2) любому вполне непрерывному оператору приводится в соответствие символ, тождественно равный нулю; 3) сумме и произведению операторов упомянутого класса соответствуют сумма и произведение их символов; 4) норма оператора оценивается сверху через норму его символа, взятую в метрике некоторого подходящего функционального пространства. Имея в виду все сказанное, рассмотрим одномерное сингулярное интегральное уравнение

$$Qu = a(z)\,u(z) - \frac{b(z)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u(t)}{t-z}\,dt + Tu = g(z), \quad z\in\gamma, \tag{6}$$

в котором γ — гладкая замкнутая кривая в комплексной плоскости, $a(z)$ и $b(z)$ — непрерывные на γ функции, T — вполне непрерывный в $L_p(\gamma)$ оператор. Оператору Q можно приписать в качестве символа функцию $\Phi(z, j) = a(z) - b(z)\,j$, где переменная j принимает только два значения[1] ± 1. Перечисленные здесь свойства символа имеют место; в частности, имеет место свойство 4), если, например, положить $\|\Phi(z, j)\| = \max\limits_{z\in\gamma}|a(z)| + \max\limits_{z\in\gamma}|b(z)|$. Условие необращения символа в нуль в данном случае принимает вид $a^2(z) - b^2(z) \neq 0$, $z\in\gamma$. Напомним известную формулу для индекса оператора Q:

$$\operatorname{Ind} Q = \frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{\gamma} d\arg\,[a(z) - b(z)] - \int\limits_{\gamma} d\arg\,[a(z) + b(z)]\right\}. \tag{7}$$

Множество значений символа заполняет две кривые, заданные параметрическими уравнениями

$$\zeta = a(z) - b(z), \qquad \zeta = a(z) + b(z), \qquad z\in\gamma. \tag{8}$$

Если ни одна из этих кривых не обходит точки $\zeta = 0$, то кривая L существует, и продолжение по параметру возможно; заметим, что в этом случае $\operatorname{Ind} Q = 0$. Если же одна или обе кривые (8) обходят точку $\zeta = 0$, то один или оба интеграла могут оказаться отличными от нуля и $\operatorname{Ind} Q$ может оказаться отрицательным, а тогда, по теореме 5.2, эквивалентная регуляризация невозможна и метод продолжения по параметру, естественно, неприменим.

---

[1]) См. статью автора [11].

§ 40. Системы сингулярных интегральных уравнений

Будем рассматривать системы вида

$$\sum_{k=1}^{m} A_{jk} u_k = g_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где A_{jk} — общий сингулярный оператор, символ которого обозначим через $\Phi_{jk}(x, \theta)$. Введя матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

и векторы-столбцы u и g с составляющими $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n$ соответственно, можно систему (1) записать в виде одного уравнения

$$Au = g. \tag{1a}$$

Будем называть A *матричным сингулярным оператором*. Введем в рассмотрение еще *символическую матрицу* оператора A (или системы (1)):

$$\Phi(x, \theta) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}, & \Phi_{12}, & \ldots, & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21}, & \Phi_{22}, & \ldots, & \Phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{n1}, & \Phi_{n2}, & \ldots, & \Phi_{nn} \end{pmatrix}; \tag{3}$$

ее определитель $\delta = \det \Phi$ назовем *символическим определителем* оператора A или соответствующей системы (1). Примем, что символы $\Phi_{jk}(x, \theta)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.34 и что $\Phi(x, \theta) \hat{\in} W_2^{(m-1)}(S)$ при $m > 3$.

Матричные сингулярные операторы перемножаются по обычному правилу умножения матриц. Отсюда сразу следует, что *произведению двух матричных сингулярных операторов соответствует произведение их символических матриц*. Очевидно также, что сумме матричных сингулярных операторов соответствует сумма их символических матриц.

Теорема 1.40. *Если символический определитель системы* (1) *не принимает значения нуль, так что*

$$\inf |\delta| > 0, \tag{4}$$

то в соответствующем пространстве $L_p(\Gamma)$ *система* (1) *нормально разрешима и имеет конечный индекс.*

Доказательство непосредственно вытекает из того факта, что сопряженные операторы A и A^* оба допускают регуляризацию: регуляризаторами являются матричные сингулярные операторы с символическими матрицами $\Phi^{-1}(x, \theta)$ и $\Phi^{*-1}(x, \theta)$ соответственно, где Φ^* — матрица, сопряженная с Φ.

В отличие от случая одного сингулярного уравнения, индекс системы может быть отличен от нуля и тогда, когда выполнено неравенство (4) и символы $\Phi_{jk}(x, \theta)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.34: в заметке А. И. Вольперта [1] утверждается (пока без подробных доказательств), что существуют двумерные сингулярные системы, удовлетворяющие только что упомянутым условиям и имеющие отличный от нуля индекс.

Ниже приводятся некоторые достаточные признаки равенства нулю индекса системы.

Самый простой случай такого рода имеет место, если интегрирование совершается по евклидову пространству, а символическая матрица не зависит от x. В этом случае простейшие сингулярные операторы с символическими матрицами Φ^{-1} и Φ^{*-1} являются эквивалентными регуляризаторами для матричных операторов A и A^* соответственно, и из теоремы 5.2 вытекает, что $\operatorname{Ind} A = 0$.

Теорема 2.40. *Пусть символическая матрица системы* (1) *имеет вид* $\Phi(x, \theta) = I - \Psi(x, \theta)$, *где* I — *единичная матрица. Если характеристические числа матрицы* Ψ *при любых значениях* x *и* θ *строго меньше единицы по модулю, то индекс системы* (1) *равен нулю.*

Пусть $\psi(x, \theta)$ — произвольная символическая матрица, элементы которой удовлетворяют лишь условиям теоремы 2.34. Рассмотрим матричный сингулярный оператор A_λ с символической матрицей $I - \lambda\psi(x, \theta)$ и выделим в комплексной λ-плоскости открытое множество Δ, на котором характеристические числа этой матрицы не принимают значения нуль. Повторяя рассуждения теоремы 4.36, найдем, что индекс оператора A_λ постоянен в каждой из связных областей, на которые распадается множество Δ. Обращаясь к условиям теоремы, видим, что круг $|\lambda| \leqslant 1$ принадлежит целиком одной такой области. Отсюда следует, что индексы систем, соответствующих значениям параметра $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, совпадают. Но при $\lambda = 1$ получается данная система, а при $\lambda = 0$ — система типа Риса — Шаудера. Теорема доказана.

Теорема 3.40. *Если нижние грани модулей миноров*

$$\delta_1 = \Phi_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \Phi_{11}, & \Phi_{12} \\ \Phi_{21}, & \Phi_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \delta_n = \delta = \begin{vmatrix} \Phi_{11}, & \Phi_{12}, & \ldots, & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21}, & \Phi_{22}, & \ldots, & \Phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{n1}, & \Phi_{n2}, & \ldots, & \Phi_{nn} \end{vmatrix}$$

положительны, то индекс системы (1) *равен нулю.*

Выделим первое уравнение системы и будем рассматривать его как уравнение с неизвестной u_1. Оно допускает эквивалентную регуляризацию и, следовательно, может быть сведено к эквивалентному уравнению вида

$$u_1(x) = \sum_{k=2}^{n} A_k^{(1)} u_k + \sum_{k=1}^{n} T_k^{(1)} u_k + g^{(1)}(x), \tag{5}$$

где $g^{(1)}(x)$ — некоторая известная функция, $T_k^{(1)}$ — вполне непрерывные операторы и $A_k^{(1)}$ — сингулярные операторы с символами $-\frac{\Phi_{1k}}{\Phi_{11}}$. Выражение (5) подставим в остальные уравнения (1); это приведет нас к системе из $n-1$ уравнений, которые содержат под знаками сингулярных операторов только неизвестные $u_2, u_3, \ldots, u_n$. Первое из этих уравнений содержит неизвестную u_2 под знаком сингулярного оператора, символ которого равен $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ и, следовательно, не принимает значения нуль. Но тогда это уравнение сводится к эквивалентному уравнению

$$u_2(x) = \sum_{k=3}^{n} A_k^{(2)} u_k + \sum_{k=1}^{n} T_k^{(2)} u_k + g^{(2)}(x); \tag{6}$$

смысл обозначений очевиден. Выражение (6) подставим в остальные $n-2$ уравнения. Первое из полученных после этого уравнений содержит неизвестную u_3 под знаком сингулярного оператора с символом $\frac{\delta_3}{\delta_2}$. Продолжая процесс, мы в конечном счете придем к системе

$$u_j(x) = \sum_{k=j+1}^{n} -A_k^{(j)} u_k + \sum_{k=1}^{n} T_k^{(j)} u_k + g^{(j)}(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

равносильной системе (1); при $j = n$ первая сумма в (7) исчезает.

Система (7) очевидным образом сводится к равносильной системе Риса — Шаудера, а это означает, что система (1) допускает эквивалентную регуляризацию; по теореме 5.2 индекс этой системы неотрицателен. Но условия теоремы выполняются и для сопряженной системы, которая поэтому также имеет неотрицательный индекс. Отсюда следует, что индекс данной системы равен нулю.

Теорема 4.40. *Пусть в комплексной ζ-плоскости существует гладкая кривая L, соединяющая точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ и не имеющая общих точек с множеством характеристических чисел символической матрицы $\Phi(x, \theta)$, соответствующей некоторому матричному сингулярному оператору A. Тогда* $\operatorname{Ind} A = 0$.

Доказательство проведем методом продолжения по параметру, аналогичным методу § 39. Будем считать, что сингулярное интегрирование совершается по ляпуновскому замкнутому многообразию Γ; если бы интегрирование совершалось по евклидову пространству, то достаточно было бы перейти к римановой сфере. Как и в случае одного уравнения, выполним преобразование $\zeta = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$; кривая L переходит в λ-плоскости в некоторую кривую $\tilde{L}$ с концами $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$; можно считать, что кривая L не проходит через точку $\zeta = 1$, тогда кривая $\tilde{L}$ имеет конечную длину.

Рассмотрим систему

$$u - \lambda (I - A) u = g(x) \tag{8}$$

с символической матрицей $I - \lambda (I - \Phi) = \lambda (\Phi - \zeta I)$. Прежде всего докажем, что определитель этой матрицы не принимает значения нуль. В самом деле, если $|\lambda|$ мал, то указанный определитель близок к $(1 - \lambda)^n$, где n — порядок системы; можно, следовательно, найти такие числа $\eta > 0$ и $q > 0$, что при $|\lambda| < \eta$ будет $|\det[(1 - \lambda) I + \lambda\Phi]| > q$.

Пусть теперь $|\lambda| \geqslant \eta$. Тогда

$$|\det[(1-\lambda)I+\lambda\Phi]| \geqslant \eta^n |\det(\zeta I - \Phi)| = \eta^n \prod_{k=1}^{n} |\zeta - \zeta_k(x, \theta)|,$$

где ζ_k — характеристические числа матрицы Φ. Так как они непрерывно зависят от x и θ, которые меняются на компактных замкнутых множествах Γ и S соответственно, то множества значений ζ_k ограничены и замкнуты. Теперь из допущения о существовании кривой L с указанными в формулировке теоремы свойствами вытекает существование постоянной $\gamma > 0$ такой, что $|\zeta - \zeta_k(x, \theta)| \geqslant \gamma$. Окончательно:

$$|\det[(1-\lambda)I+\lambda\Phi]| \geqslant (\gamma\eta)^n, \quad \lambda \in \tilde{L}, \quad |\lambda| \geqslant \eta,$$

и наше утверждение доказано.

Очевидно теперь, что в пространстве $\vec{L}_p(\Gamma)$, элементы которого суть векторы $u(x)$ с нормой

$$\|u\|^p = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma} |u_k(x)|^p \, d\Gamma$$

или какой-нибудь ей эквивалентной, ограничен независимо от λ сингулярный оператор

$$H_\lambda u = \int_{\Pi} [(1-\lambda)I + \lambda\Phi(x, \theta)]^{-1} [I - \Phi(x, \theta)] \, d\mathscr{E}(\theta) \, u,$$

символическая матрица которого равна

$$[(1-\lambda)I+\lambda\Phi(x, \theta)]^{-1}[I-\Phi(x, \theta)];$$

пусть норма оператора H_λ не превосходит постоянной C.

Полагая $\lambda = 0$, найдем, что $\|I - A\| \leqslant C$; поэтому, если $\lambda_0 \in \tilde{L}$ и $|\lambda_0| \leqslant \frac{1}{2}C$, то оператор $[I - \lambda_0(I - A)]^{-1}$ существует, определен на всем пространстве $\vec{L}_p(\Gamma)$ и ограничен; очевидно также, что индекс этого оператора равен нулю. Обе части уравнения (8) умножим слева на упомянутый оператор; это приведет нас к уравнению, которое: 1) равносильно уравнению (8); 2) имеет тот же индекс; 3) имеет символическую матрицу

$$[(1-\lambda_0)I+\lambda_0\Phi]^{-1}[(1-\lambda)I+\lambda\Phi] =$$
$$= I - (\lambda - \lambda_0)[(1-\lambda_0)I + \lambda_0\Phi]^{-1}(I - \Phi).$$

Обе части полученного таким образом уравнения умножим слева на оператор

$$[I-(\lambda_1-\lambda_0)H_{\lambda_0}]^{-1}, \quad \lambda_1 \in \tilde{L}, \quad |\lambda_1-\lambda_0| \leqslant \frac{1}{2}C.$$

Это приведет нас к новому уравнению, также равносильному с уравнением (8) и имеющему тот же индекс; символическая матрица нового уравнения равна

$$I-(\lambda-\lambda_1)[(1-\lambda_1)I+\lambda_1\Phi]^{-1}(I-\Phi).$$

Продолжая этот процесс и полагая $\lambda=1$ мы, как и в случае одного интегрального уравнения, придем через конечное число шагов к системе с единичной символической матрицей, т. е. к системе типа Риса — Шаудера; по построению она эквивалентна системе (1). Так как на каждом шаге индекс системы не менялся, а индекс системы Риса — Шаудера равен нулю, то и $\operatorname{Ind} A=0$.

Следствие. *Если символический определитель не принимает значения нуль, а символическая матрица эрмитова или кососимметрична, то индекс сингулярной системы равен нулю.*

Несколько изменив метод § 37, можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.40. *Пусть $m \geqslant 3$ и пусть сингулярное интегрирование распространено по евклидову пространству E_m или по замкнутому ляпуновскому m-мерному многообразию, на котором существует правильная координатная сетка. Если символ не зависит от ϑ_{m-1} и выполнено неравенство* (4), *то индекс системы* (1) *равен нулю.*

§ 41. Сингулярные интегральные уравнения в классах липшицевых функций[1])

1°. В настоящем параграфе будут установлены достаточные условия, при выполнении которых решение (если оно существует) сингулярного интегрального уравнения

$$a(x)u(x)+\int\limits_{E_m}^{\bullet} \frac{f(x,\theta)}{r^m}u(y)\,dy=g(x) \qquad (1)$$

[1]) См. статью автора [26].

удовлетворяет условию Липшица с некоторым положительным показателем. Примем, что свободный член удовлетворяет следующему условию: произведение

$$\left(\frac{1+x^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} g(x) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Sigma),$$

где Σ — сфера, в которую переходит евклидово пространство E_m при стереографическом преобразовании. Иначе говоря, мы предполагаем, что $g(x)$ принадлежит классу A_α (см. § 7); отсюда, между прочим, вытекает, что $g(x) \in L_2(E_m)$. Наша задача сводится, следовательно, к наложению достаточных условий на внеинтегральный коэффициент $a(x)$ и характеристику $f(x, \theta)$. Как обычно, мы примем, что символ уравнения (1) не принимает значения нуль.

2°. Лемма 1.41. *Пусть Ω — конечная область пространства E_m, и пусть в этой области функция $A(x, y)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|A(x, y)| \leqslant C, \quad |A(x+h, y) - A(x, y)| \leqslant N|h|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

где C, N, α — постоянные. Тогда интегральный оператор со слабой особенностью

$$v(x) = \int_\Omega \frac{A(x, y)}{r^\lambda} u(y)\, dy, \quad 0 \leqslant \lambda < m, \tag{3}$$

переводит всякую ограниченную функцию $u(x)$ в функцию $v(x) \in \mathrm{Lip}_\beta(\Omega)$, где

$$\beta = \min(\alpha, m - \lambda). \tag{4}$$

Пусть $|u(x)| \leqslant C_1$. Имеем

$$|v(x+h) - v(x)| \leqslant CC_1 \int_\Omega |r_1^{-\lambda} - r^{-\lambda}|\, dy +$$
$$+ C_1 \int_\Omega |A(x+h, y) - A(x\ y)|\, r_1^{-\lambda}\, dy, \quad r_1 = |x+h-y|.$$

Второй интеграл не превосходит величины

$$N|h|^\alpha \int_\Omega r_1^{-\lambda}\, dy \leqslant N_1 |h|^\alpha, \quad N_1 = \mathrm{const}.$$

Далее,

$$\int_{\Omega} |r_1^{-\lambda} - r^{-\lambda}|\, dy < \int_{r_1 < 2|h|} r_1^{-\lambda}\, dy + \int_{r < 2|h|} r^{-\lambda}\, dy + \\ + \int_{\Omega_1} |r_1^{-\lambda} - r^{-\lambda}|\, dy, \quad \Omega_1 = \Omega \setminus [(r_1 < 2|h|) \cup (r < 2|h|)] \cdot \tag{5}$$

Первые два интеграла справа тождественны, причем

$$\int_{r<2|h|} r^{-\lambda}\, dy = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{2|h|} r^{m-1-\lambda}\, dr = C_2 |h|^{m-\lambda}, \quad C_2 = \text{const}. \tag{6}$$

Чтобы оценить последний интеграл, заметим, что

$$r_1^{-\lambda} - r^{-\lambda} = (\operatorname{grad}_x r^{-\lambda},\ h)_{x=\xi},$$

где ξ — некоторая точка интервала $(x,\ x+h)$. Обозначая $|\xi - y| = r^*$, имеем

$$|r_1^{-\lambda} - r^{-\lambda}| \leqslant \lambda |h| (r^*)^{-\lambda-1}.$$

Из рис. 5 (стр. 55) видно, что $r^* \geqslant r - |h|$, но $r \geqslant 2|h|$; отсюда $|h| \leqslant \frac{r}{2}$ и $r^* \geqslant \frac{r}{2}$, а в таком случае

$$|r_1^{-\lambda} - r^{-\lambda}| \leqslant 2^{\lambda+1} \lambda r^{-\lambda-1} |h|.$$

Обозначая через R диаметр области Ω, имеем

$$\int_{\Omega_1} |r_1^{-\lambda} - r^{-\lambda}|\, dy \leqslant C_3 |h| \int_{2|h|}^{R} r^{m-\lambda-2}\, dr = \\ = \begin{cases} O(|h|^{m-\lambda}), & m-\lambda \neq 1, \\ O\left(|h| \ln \frac{1}{|h|}\right), & m-\lambda = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Лемма непосредственно вытекает из формул (5)—(7); она очевидным образом распространяется на тот случай, когда евклидова область Ω заменяется ограниченным достаточно гладким многообразием m измерений.

3°. Примем, что коэффициент $a(x)$ и характеристика $f(x, \theta)$ в уравнении (1) удовлетворяют следующим требованиям:

а) $a(x) \in C^{(1)}(\Sigma)$.

б) $f(x, \theta) \hat{\in} W_2^{(l)}(S), \quad l \geqslant m+2$.

в) Пусть $\omega(x, r, \theta)$ — произвольная функция от x, r, θ. Обозначим, как в § 8, через $\frac{\partial' \omega}{\partial x_j}$ производную, вычисленную в предположении, что r и θ не зависят от x и через $\frac{\partial'' \omega}{\partial x_j}$ — производную, вычисленную в предположении, что только r и θ зависят от x, так что

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial' \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial'' \omega}{\partial x_j}.$$

Нетрудно убедиться, что имеет место формула вида

$$\frac{\partial''}{\partial x_j}\left[\frac{f(x, \theta)}{r^m}\right] = \frac{f_j(x, \theta)}{r^{m+1}}.$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{\partial' f(x, \theta)}{\partial x_j} \hat{\in} W_2^{(l-1)}(S), \quad f_j(x, \theta) \hat{\in} W_2^{(l-1)}(S),$$

и чтобы эти функции, так же как и самая характеристика $f(x, \theta)$, были непрерывны на $\Sigma \times S$. Из условий а) — в) вытекают следующие свойства: г) $f(y, \theta) - f(x, \theta) = \rho^\varkappa F(\xi, \eta, \theta)$. Здесь ξ и η — образы точек x и y при стереографическом преобразовании, ρ — расстояние между точками ξ и η, $\varkappa$ — постоянная, $0 < \varkappa \leqslant 1$, и

$$|F(\xi', \eta', \theta) - F(\xi, \eta, \theta)| \leqslant N_2(|\xi' - \xi|^\sigma + |\eta' - \eta|^\sigma), \quad N_2 = \text{const},$$

$0 < \sigma < 1$; д) $a(x) - a(y) = \rho^\varkappa a(\xi, \eta)$, $a(\xi, \eta) \in \mathrm{Lip}_\sigma(\Sigma)$.

Уже было упомянуто, что $g(x) \in L_2(E_m)$ и что символ уравнения (1) не принимает значения нуль. Из условий а) и б) видно, что к уравнению (1) применима теория, развитая в настоящей главе; если $g(x)$ удовлетворяет необходимым условиям ортогональности, то уравнение (1) имеет решение (может быть, неединственное) в $L_2(E_m)$. Докажем, что при перечисленных здесь и в п. 1° условиях любое такое решение уравнения (1) принадлежит классу A_δ, где δ определяется данными задачи.

В силу теоремы 4.31, из условий б) и в) вытекает следующее: если характеристику разложить в ряд по сферическим функциям

$$f(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |a_n^{(k)}(x)|^2 \leqslant C_3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l-2} \left| \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial x_j} \right|^2 \leqslant C_3,$$

$$C_3 = \text{const}.$$

Составим символ уравнения (1)

$$\Phi(x, \theta) = a(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \gamma_{n,m} a_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta) =$$
$$= a(x) + \int_S f(x, \theta') P(\cos\gamma)\, dS',$$

где (см. формулу (12) § 20) $P(\cos\gamma) = \ln \frac{1}{|\cos\gamma|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sign} \cos\gamma$. Отсюда

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial a}{\partial x_j} + \int_S \frac{\partial' f(x, \theta)}{\partial x_j} P(\cos\gamma)\, dS'. \tag{8}$$

Таким образом, если рассматривать $\frac{\partial' f(x, \theta)}{\partial x_j}$ как характеристику некоторого сингулярного оператора, а $\frac{\partial a}{\partial x_j}$ как его внеинтегральный коэффициент, то символ этого оператора окажется равным функции $\frac{\partial' \Phi}{\partial x_j}$; на основании теоремы 1.32 отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial x_j} \in W_2^{\left(l-1+\left[\frac{m}{2}\right]\right)}(S).$$

То же верно и для функции

$$\frac{\partial' \Phi^{-1}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j},$$

поскольку $\inf |\Phi| > 0$.

Пусть теперь

$$\Phi^{-1}(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} b_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta).$$

Тогда, по уже цитированной теореме 4.31,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2\left(l-1+\left[\frac{m}{2}\right]\right)} \left| \frac{\partial b_n^{(k)}}{\partial x_j} \right|^2 \leqslant C_4 = \mathrm{const},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l-3} |\gamma_{n,m}|^{-2} \left| \frac{\partial b_n^{(k)}(x)}{\partial x_j} \right|^2 \leqslant C_5 = \mathrm{const}.$$

Отсюда во всяком случае следует, что $\mathrm{grad}' \varphi(x, \theta) \in \hat{W}_2^{(l-2)}(S)$, где $\varphi(x, \theta)$ — характеристика, соответствующая символу $\Phi^{-1}(x, \theta)$. Одновременно, в силу теоремы 2.32, $\mathrm{grad}'' \varphi(x, \theta) \in \hat{W}_2^{(l-2)}(S)$. Так как $l-2 \geqslant m$, то, в силу теоремы 5.31, ряды, полученные дифференцированием ряда для $\varphi(x, \theta)$ по декартовым координатам точки θ, сходятся абсолютно и равномерно. Из формулы (8) вытекает, в силу условий б) и в), что функции $\Phi(x, \theta)$ и $\frac{\partial' \Phi(x, \theta)}{\partial x_j}$ непрерывны на $\Sigma \times S$. Но тогда на $\Sigma \times S$ непрерывны также $\Phi^{-1}(x, \theta)$ и $\frac{\partial' \Phi^{-1}(x, \theta)}{\partial x_j}$, а следовательно, также коэффициенты $b_n^{(k)}(x)$ и их производные $\frac{\partial b_n^{(k)}(x)}{\partial x_j}$. Отсюда вытекает, что $\varphi(x, \theta) \in C^{(1)}(\Sigma \times S)$, а тогда

$$\left| \mathrm{grad}_\xi \frac{\varphi(x, \theta)}{\rho^m} \right| \leqslant \frac{C_6}{\rho^{m+1}}, \quad C_6 = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Здесь $\rho = |\xi - \eta|$, где ξ и η — образы точек x и y при стереографическом преобразовании. Теперь из результатов § 7 следует, что сингулярный оператор

$$b_0^{(1)}(x) u(x) + \int_{E_m} L(x, x-y) u(y)\, dy,$$

$$L(x, x-y) = \frac{\varphi(x, \theta)}{r^m} = \frac{\varphi(x, \theta)}{\left(\frac{1+x^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1+y^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \rho^m}, \tag{10}$$

переводит всякую функцию класса A_α в функцию того же класса.

4°. Воздействуем на обе части уравнения (1) оператором (10), символ которого равен $\Phi^{-1}(x, \theta)$. Это приведет нас к уравнению типа Риса — Шаудера

$$u(x)+Tu=F(x), \tag{11}$$

которому удовлетворяют все решения уравнения (1). Как только что было указано, $F(x)\in A_\alpha$.

Выясним структуру оператора T. Имеем

$$(I+T)u=b_0^{(1)}(x)v(x)+\int\limits_{E_m} L(x,\ x-y)v(y)\,dy,$$

$$v(x)=a(x)u(x)+\int\limits_{E_m} K(x,\ x-y)u(y)\,dy.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(I+T)u=b_0^{(1)}(x)a(x)u(x)+\int\limits_{E_m} b_0^{(1)}(x)K(x,\ x-y)u(y)\,dy+\\ +\int\limits_{E_m} a(y)L(x,\ x-y)u(y)\,dy+\\ +\int\limits_{E_m} L(x,\ x-y)\,dy\int\limits_{E_m} K(y,\ y-z)u(z)\,dz.\end{aligned} \tag{12}$$

Выделим отсюда простейшие сингулярные слагаемые, дающие в сумме тождественный оператор. Первые три члена дают такие слагаемые:

$$\begin{aligned}b_0^{(1)}(x)a(x)u(x)+b_0^{(1)}(x)\int\limits_{E_m} K(x,\ x-y)u(y)\,dy+\\ +a(x)\int\limits_{E_m} L(x,\ x-y)u(y)\,dy.\end{aligned}$$

Вполне непрерывный остаток имеет вид

$$w(x)=\int\limits_{E_m}[a(y)-a(x)]L(x,\ x-y)u(y)\,dy. \tag{13}$$

Обратимся к четвертому члену в (11). Имеем

$$\int_{E_m} L(x,\ x-y)\,dy \int_{E_m} K(y,\ y-z)\,u(z)\,dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} L(x,\ x-y)\,dy \int_{E_m} K(y,\ y-z)\,u(z)\,dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_m} u(z)\,dz \int_{|y-x|>\varepsilon} L(x,\ x-y)\,K(y,\ y-z)\,dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_m} u(z)\,dz \int_{|y-x|>\varepsilon} L(x,\ x-y)\,K(x,\ y-z)\,dz +$$

$$+ \int_{E_m} u(z)\,dz \int_{E_m} L(x,\ x-y)\,[K(y,\ y-z) - K(x,\ y-z)]\,dy.$$

Первый интеграл есть простейший сингулярный оператор; вместе с выделенными ранее аналогичными слагаемыми он дает тождественный оператор. Последний интеграл в сумме с интегралом (13) дает оператор T:

$$Tu = \int_{E_m} \Big\{ [a(y) - a(x)]\,L(x,\ x-y) +$$

$$+ \int_{E_m} L(x,\ x-z)\,[K(z,\ z-y) - K(x,\ z-y)]\,dz \Big\}\, u(y)\,dy. \tag{14}$$

Введем обозначения

$$\left(\frac{1+x^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} u(x) = \tilde{u}(\xi), \qquad \left(\frac{1+x^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} F(x) = \tilde{F}(\xi),$$

$$\left(\frac{1+x^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} Tu = \tilde{T}\tilde{u}.$$

Уравнение (11) переходит тогда в следующее:

$$\tilde{u}(\xi) + \tilde{T}\tilde{u} = \tilde{F}(\xi). \tag{15}$$

Оператор $\widetilde{T}$ вполне непрерывен в $L_2(\Sigma)$; он имеет вид

$$\widetilde{T}\widetilde{u}=\int\limits_{\Sigma}\left\{[a(y)-a(x)]\frac{\varphi(x,\theta)}{\rho^m}+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\Sigma}\frac{[f(z,\theta_{yz})-f(x,\theta_{yz})]\,\varphi(x,\theta_{xz})}{|\xi-\zeta|^m\,|\eta-\zeta|^m}\,d\Sigma_\zeta\right\}\widetilde{u}(\eta)\,d\Sigma_\eta; \qquad (16)$$

здесь ζ — образ точки z при стереографическом преобразовании.

Из свойств г) и д) и из некоторых результатов статьи [1] Жиро о композиции сингулярных интегралов и интегралов со слабой особенностью вытекает, что ядро интеграла (16) удовлетворяет условиям леммы 1.41. В частности, это ядро имеет слабую особенность. Функция $\widetilde{F}(\xi)\in \mathrm{Lip}_\alpha(\Sigma)$, тем более эта функция ограничена, а тогда, как известно, всякое решение уравнения (15), суммируемое с квадратом, ограничено. По лемме 1.41, $\widetilde{T}\widetilde{u}\in \mathrm{Lip}_\beta(\Sigma)$, где β определяется данными задачи, а тогда $\widetilde{u}(\xi)=[\widetilde{F}(\xi)-\widetilde{T}\widetilde{u}]\in \mathrm{Lip}_\delta(\Sigma)$, $\delta=\min(\alpha,\beta)$, что и требовалось доказать.

5°. Результаты настоящего параграфа распространяются и на тот случай, когда уравнение имеет вид

$$a(\xi)\,u(\xi)+\int\limits_{\Gamma}K(\xi,\eta)\,u(\eta)\,d\Gamma_\eta=g(\xi), \qquad g(\xi)\in L_2(\Gamma),$$

где Γ — достаточно гладкое замкнутое многообразие m измерений, а ядро подчинено, например, следующему условию: если некоторая окрестность произвольной точки $\xi\in\Gamma$ отображена достаточно гладко на некоторую область пространства E_m и если x и y суть образы точек ξ и η при таком преобразовании, то

$$K(\xi,\eta)=\frac{f(x,\theta)}{r^m}+\frac{f_0(x,y)}{r^{m-\lambda}},$$

где сингулярное ядро $r^{-m}f(x,\theta)$ удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, показатель $\lambda>0$, а функция $f_0(x,y)$ непрерывно дифференцируема по координатам обеих точек x и y.

Распространение результатов на системы сингулярных уравнений очевидно.

ГЛАВА VIII
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 42. Старшие производные объемного потенциала

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u, \tag{1}$$

где $A_{ij} = A_{ji}$, B_i и C суть функции точки $x \in D$ и D — некоторая область пространства E_m. Оператор L будем считать эллиптическим в D, так что в любой точке этой области и при любых вещественных числах t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x)t_i t_j \geqslant \mu \sum_{i=1}^{m} t_i^2, \tag{2}$$

в котором μ — некоторая положительная постоянная. Допустим, что в области D коэффициенты оператора (1) удовлетворяют условию Липшица с показателем $\lambda > 0$. Тогда [1]) при довольно широких предположениях относительно области D в этой области существует фундаментальное, или сингулярное, решение $H(x, y)$ уравнения $Lu = 0$; это решение можно представить в виде

$$H(x, y) = \psi(x, y) + \int_D \psi(x, z) f(z, y)\,dy = \psi(x, y) + \psi_1(x, y), \tag{3}$$

---

[1]) См., например, К. Миранда [1].

где при $m > 2$ функция $\psi(x, y)$ определяется формулой

$$\psi(x, y) = \frac{1}{(m-2)\,\omega_m \sqrt{A}} \left\{ \sum_{i, j=1}^{m} C_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right\}^{-\frac{m-2}{2}}, \tag{4}$$

в которой $\omega_m = \dfrac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$ есть площадь поверхности гиперсферы радиуса единица, A — определитель матрицы коэффициентов $\|A_{ij}\|$, а C_{ij} суть элементы соответствующей обратной матрицы; наконец, $f(z, y)$ некоторая функция, непрерывная при $z \neq y$ и имеющая при $z \to y$ полярность порядка $\leqslant m - \lambda$. В силу известной теоремы о композиции интегралов со слабой особенностью [1]), отсюда вытекает, что при $x \to y$ функция $\psi_1(x, y)$ имеет полярность порядка $\leqslant m - 2 - \lambda$, так что главный член сингулярного решения дается формулой (4). Заметим еще, что при $m = 2$ формула (4) заменяется следующей:

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \sum_{i, j=1}^{2} C_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right\}. \tag{4a}$$

Рассмотрим произвольную область $\Omega \subset D$, и пусть $f(x) \in L_p(\Omega)$ при некотором p из интервала $1 < p < \infty$. Интеграл

$$g(x) = \int_\Omega H(x, y) f(y)\, dy \tag{5}$$

назовем *объемным потенциалом*.

Теорема 1.42. [2]) Если $f(x) \in L_p(\Omega)$, *то объемный потенциал имеет обобщенные вторые производные, суммируемые в Ω со степенью p, и удовлетворяет почти*

---

[1]) См., например, книгу автора [12].

[2]) Теорема 1.42 была сформулирована автором в качестве гипотезы в статье [13]; для оператора Лапласа эта теорема была для произвольного p доказана А. Кальдероном и А. Зигмундом [1]. При $p = 2$ справедливость теоремы вытекает из более ранних результатов автора.

всюду в Ω уравнению

$$Lg = f(x). \tag{6}$$

Имеем

$$g(x) = \int_\Omega \psi(x, y) f(y)\, dy + \int_\Omega \psi_1(x, y) f(y)\, dy. \tag{7}$$

Второй член в (7), очевидно, имеет обобщенные производные первых двух порядков. Первый член в (7) можно один раз дифференцировать под знаком интеграла, что приведет к интегралу вида (1) § 29; соответствующая функция $\varphi(x, \theta)$, как нетрудно видеть, непрерывно дифференцируема по x и аналитична по θ. По теореме 1.29 допустимо еще одно дифференцирование, которое можно выполнить по формуле (2) § 29. Тем самым установлено существование обобщенных вторых производных $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \in L_p(\Omega)$. Произведя необходимые вычисления, найдем

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} f(y)\, dy -$$

$$- \frac{f(x)}{\omega_m \sqrt{A(x)}} \int_S \left\{ \sum_{k, l=1}^m C_{kl}(x) \cos(\nu, x_k) \cos(\nu, x_l) \right\}^{-\frac{m}{2}} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^m C_{il}(x) \cos(\nu, x_l) \cos(\nu, x_j)\, dS,$$

откуда

$$Lg = \int_\Omega f(y) LH\, dy + \frac{f(x)}{\omega_m \sqrt{A(x)}} E(x) = \frac{f(x) E(x)}{\omega_m \sqrt{A(x)}}. \tag{8}$$

Здесь

$$E(x) = \int_S \left\{ \sum_{i, j=1}^m C_{ij}(x) \cos(x_i, \nu) \cos(x_j, \nu) \right\}^{-\frac{m}{2}} \times$$

$$\times \sum_{i, j, k=1}^m A_{ij}(x) C_{ik}(x) \cos(x_j, \nu) \cos(x_k, \nu)\, dS. \tag{9}$$

Из формулы (8), очевидно, следует, что величина $E(x)$ инвариантна относительно поворота декартовых осей координат. Направим их по главным осям формы (2). Тогда

$$A_{ij}=0,\ i\neq j;\quad C_{ik}=0,\ i\neq k;\quad C_{ii}=\frac{1}{A_{ii}}$$

и, следовательно,

$$E(x)=\int\limits_S\left\{\sum_{i=1}^m\frac{\cos^2(x_i,\nu)}{A_{ii}}\right\}^{-\frac{m}{2}}dS. \tag{10}$$

Вычислим последний интеграл. Обозначим $A_{ii}^{-1}=a_i^2$; поместив начало координат в точке x, можем положить $\cos(x_i,\ \nu)=y_i$. Теперь

$$E(x)=\int\limits_s\left\{\sum_{i=1}^m a_i^2y_i^2\right\}^{-\frac{m}{2}}dS.$$

Введем сферические координаты. Тогда $y_1=\cos\vartheta_1$. Выражения остальных координат содержат множитель $\sin\vartheta_1$ и можно положить

$$\sum_{i=2}^m a_i^2y_i^2=\alpha^2\sin^2\vartheta_1,$$

где α не зависит от a_1 и ϑ_1. Наконец,

$$dS=\prod_{k=1}^{m-1}\sin^{m-k-1}\vartheta_k\,d\vartheta_k.$$

Теперь

$$E(x)=\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^{2\pi}\sin^{m-3}\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_2\ldots d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1}\times$$
$$\times\int\limits_0^\pi\left(a_1^2\cos^2\vartheta_1+\alpha^2\sin^2\vartheta_1\right)^{-\frac{m}{2}}\sin^{m-2}\vartheta_1\,d\vartheta_1.$$

Внутренний интеграл равен

$$2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a_1^2\cos^2\vartheta_1+\alpha^2\sin^2\vartheta_1\right)^{-\frac{m}{2}}\sin^{m-2}\vartheta_1\,d\vartheta_1. \tag{11}$$

Воспользуемся формулой [1])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2r-1}\cos^{2s-1}x}{(p^2\sin^2 x+q^2\cos^2 x)^{r+s}}\,dx=\frac{B(r,\ s)}{2p^{2r}q^{2s}}.$$

Полагая в ней $r=\frac{m-1}{2}$, $s=\frac{1}{2}$, $p=\alpha, q=a_1$, найдем, что интеграл (11), а с ним и величина $E(x)$, обратно пропорциональна a_1. Отсюда следует, что

$$E(x)=\frac{C}{a_1a_2\ldots a_m}=C\sqrt{A_{11}A_{22}\ \ldots\ A_m},$$

где C — постоянная. Чтобы ее определить, положим в (10) $A_{il}=1$. Тогда $E(x)=C=\omega_m$. Добавим к этому, что если оси координат направлены по главным осям формы (2), то $A_{11}A_{22}\ \ldots\ A_{mm}=A(x)$. Окончательно, $E(x)=\omega_m\sqrt{A(x)}$, и формула (8) принимает вид $Lg=f(x)$. Теорема доказана.

§ 43. Задача о косой производной

Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,\,j=1}^{m}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f(x), \tag{1}$$

коэффициенты левой части которого достаточное число раз непрерывно дифференцируемы. Задача о косой производной для уравнения (1) ставится следующим образом. Пусть Ω — область пространства E_m, ограниченная поверхностью Γ. С каждой точкой Γ свяжем некоторое направление λ и будем искать интеграл уравнения (1), удовлетворяющий краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\sigma(x)\,u=\varphi(x),\quad x\in\Gamma, \tag{2}$$

где $\sigma(x)$ — заданная на Γ функция.

---

[1]) См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн [1], стр. 177, формула 3.429.

Ограничимся случаем, когда Γ — достаточно гладкая замкнутая поверхность, а направление λ в любой точке этой поверхности образует с внешней нормалью острый угол, который является достаточно гладкой функцией точки $x \in \Gamma$.

В этих предположениях задача о косой производной была исследована Ж. Жиро [1, 2], результаты которого изложены также в книге К. Миранда [1]. Проводимое ниже исследование задачи о косой производной существенно проще исследования самого Жиро благодаря использованию символа.

Для задачи о косой производной имеют место следующие теоремы единственности: [1])

1) если область Ω конечная, причем $C \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$ и хотя бы одна из этих функций отлична от тождественного нуля, то задача о косой производной имеет не более одного решения;

2) если область Ω бесконечная, $C \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$ и решение подчинено условию $u(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$, то это решение единственно;

3) если область Ω конечная, $C \equiv 0$, $\sigma \equiv 0$, то два решения задачи о косой производной могут различаться только на постоянное слагаемое.

Решать нашу задачу будем следующим образом. Примем, что $f(x) \equiv 0$ — этого можно добиться, вычтя из неизвестной $u(x)$ объемный потенциал с плотностью $f(x)$. Пусть, далее, поверхность Γ такова, что любое удовлетворяющее известным условиям гладкости решение уравнения

$$-\sum_{i, j=1}^{m} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = 0 \tag{3}$$

можно представить в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} H(x, y) \mu(y) d\Gamma_y \tag{4}$$

и притом единственным образом. Подставив выражение (4) в краевое условие (2), получим сингулярное интегральное уравнение для неизвестной $\mu(y)$. Найдем вид этого уравнения.

[1]) К. Миранда [1], стр. 17.

Применяя обычные методы теории потенциала, нетрудно получить формулу, впервые найденную Ж. Жиро

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \mp \frac{\mu(x)}{2a^{(\lambda)}(x)} + \int_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \mu(y)\, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma; \tag{5}$$

подробный вывод формулы (5) приведен в книге К. Миранда [1], стр. 43. Знаки минус и плюс соответствуют предельным значениям изнутри, соответственно извне Г. Далее,

$$a^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\cos(\nu, \lambda)} \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \cos(\nu, x_i) \cos(\nu, x_j),$$

ν — внешняя нормаль к Г. Уравнение для $\mu(x)$ имеет вид

$$\mp \frac{\mu(x)}{2a^{(\lambda)}(x)} + \int_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \mu(y)\, d\Gamma_y + \\ + \sigma(x) \int_{\Gamma} H(x, y)\, \mu(y)\, d\Gamma_y = \varphi(x). \tag{6}$$

Докажем, что символ уравнения (6) нигде не обращается в нуль, если только направление λ нигде не касательно к Г. Напомним, что в силу результатов § 21 множество значений символа не меняется при невырожденном преобразовании переменных. Имея это в виду, выполним такое преобразование переменных, чтобы в рассматриваемой точке $x \in \Gamma$ стало $A_{ij} = 0$, $i \neq j$, $A_{ii} = 1$ и чтобы касательная плоскость к Г в точке x совпала с плоскостью $x_m = 0$. Тогда $[a^{(\lambda)}(x)]^{-1} = \cos(\nu, \lambda)$, а главный член в H (см. формулы (3) и (4) § 42) сводится к

$$\psi(x, y) = \frac{1}{(m-2)\,\omega_m r^{m-2}}.$$

В рассматриваемой точке уравнение (6) принимает вид

$$\mp \frac{\cos(\nu, \lambda)}{2} \mu(x) + \frac{1}{\omega_m} \int_{\Gamma} \frac{\cos(r, \lambda)}{r^{m-1}} \mu(y)\, dy + \\ + \int_{\Gamma} M(x, y)\, \mu(y)\, dy = \varphi(x), \tag{7}$$

где $M(x, y)$ — ядро со слабой особенностью. Далее,

$$\cos(r, \lambda) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{y_k - x_k}{r} \cos(\lambda, x_k) = \sum_{k=1}^{m} Y_{1, m-1}^{(k)}(\theta) \cos(\lambda, x_k),$$

где $Y_{1, m-1}^{(k)}(\theta)$ суть сферические функции первого порядка в $(m-1)$-мерном пространстве. Сингулярный оператор в (7) имеет символ

$$\Phi(x, \theta) = \mp \frac{\cos(\nu, \lambda)}{2} + \frac{1}{\omega_m} \gamma_{1, m-1} \cos(r, \lambda),$$

где r — любое направление в касательной плоскости. Но

$$\gamma_{1, m-1} = \frac{i\pi^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \frac{i\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = i \frac{\omega_m}{2},$$

так что

$$\Phi(x, \theta) = \mp \frac{\cos(\nu, \lambda)}{2} + i \frac{\cos(r, \lambda)}{2},$$

и

$$\inf |\Phi(x, \theta)| \geqslant \frac{1}{2} \inf |\cos(\nu, \lambda)| > 0. \tag{8}$$

Символ (8) удовлетворяет условию применимости метода продолжения по параметру (§ 39). Действительно, пусть $\delta = \max(\nu, \lambda)$, $\delta < \frac{\pi}{2}$. Тогда $\cos(\nu, \lambda) \geqslant \cos\delta$; на комплексной ζ-плоскости значения символа не попадают в полосу $-\cos\delta < \operatorname{Re}\zeta < \cos\delta$, и в качестве кривой L можно взять одну из мнимых полуосей.

Для уравнения (6) справедливы теоремы Фредгольма, поэтому, если имеет место теорема единственности, то задача о косой производной разрешима; если теорема единственности не имеет места, то число решений однородной задачи конечно, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x)$ ортогональна ко всем решениям (их число также конечно) однородного уравнения, сопряженного с уравнением (6).

Замечание. Если в некоторой точке поверхности Γ направление λ касательно к поверхности, то, как это видно из формулы (8), символ уравнения (7) обращается в нуль при $\cos(r, \lambda) = 0$. В этом случае задача о косой производной полностью до настоящего времени не изучена. Исключение представляет случай $m = 2$, для которого задача о косой производной сводится к хорошо изученному одномерному сингулярному интегральному уравнению.

Рассмотрим еще следующую задачу, близкую к задаче о косой производной. Пусть требуется найти вектор-функцию $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, которая на границе Γ некоторой области $\Omega \subset E_m$ удовлетворяет краевому условию

$$\left[\sum_{j=1}^{m} A_j(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + A_0(x)\,\mathbf{u}\right]_\Gamma = \mathbf{f}(x), \tag{9}$$

а внутри области Ω удовлетворяет некоторой системе эллиптических дифференциальных уравнений; для простоты примем, что эта система сводится к векторному уравнению Лапласа

$$\Delta \mathbf{u} = 0. \tag{10}$$

В краевом условии (9) $A_j(x)$, $A_0(x)$ суть квадратные матрицы порядка k с непрерывными на поверхности Γ элементами; $\mathbf{f}(x)$ — вектор-функция, суммируемая с некоторой степенью p, $1 < p < \infty$. Поверхность Γ предполагается замкнутой ляпуновской.

Отыскивая решение в виде потенциала простого слоя

$$\mathbf{u} = \frac{1}{(m-2)\,\omega_m} \int_\Gamma \frac{\sigma(y)}{r^{m-2}}\, d\Gamma_y,$$

мы придем к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестной вектор-функции $\sigma(y)$. Примем для удобства вычислений, что в формуле (9) x_j означают местные координаты, причем ось x_m направлена по внешней нормали к поверхности Γ. Тогда упомянутая сингулярная система примет вид

$$\mp \frac{1}{2} A_m(x)\,\sigma(x) + \frac{1}{(m-2)\,\omega_m} \int_\Gamma \sigma(y) \sum_{j=1}^{m-1} A_j(x) \frac{dr^{2-m}}{\partial x_j}\, d\Gamma_y + \\ + \frac{1}{(m-2)\,\omega_m} \int_\Gamma A_0(x)\,\sigma(y)\, r^{2-m}\, d\Gamma_y = \mathbf{f}(x). \tag{11}$$

Характеристики сингулярных интегралов в (11) суть сферические функции первого порядка; отсюда легко усмотреть, что символическая матрица системы (11) равна

$$\frac{1}{2}\left[\mp A_m(x)+i\sum_{j=1}^{m-1}A_j(x)\cos(r,\ x_j)\right],$$

если ее определитель нигде не обращается в нуль, то индекс задачи (9) — (10) конечен, а сама задача нормально разрешима.

В статье А. И. Вольперта [1] приведена без доказательства формула для индекса задачи (9) — (10) при следующих дополнительных предположениях: 1) $m=3$; 2) поверхность Г гомеоморфна сфере, трижды дифференцируема и ограничивает область Ω извне; 3) число k — четное; 4) $A_m(x)=bI$, где b — постоянная, вообще говоря, комплексная, I — единичная матрица; 5) при любом t, $0\leqslant t\leqslant 1$, определитель матрицы

$$-btI+\sum_{j=1}^{2}A_j(x)\cos(r,\ x_j)$$

отличен от нуля. Утверждается, что при перечисленных условиях существует задача (9) — (10), индекс которой равен любому четному числу. Мы не приводим здесь формулы А. И. Вольперта ввиду некоторой громоздкости ее описания.

§ 44. Неравенство между касательной и нормальной составляющими градиента гармонической функции

Пусть Ω — конечная или бесконечная область m-мерного евклидова пространства E_m, ограниченная замкнутой ляпуновской поверхностью Г. Рассмотрим гармоническую в Ω функцию $u(x)$; для простоты допустим, что она непрерывно дифференцируема в замкнутой области. Обозначим через ν нормаль к Г и через $\operatorname{grad}_\Gamma u$ составляющую градиента $u(x)$, параллельную касательной плоскости к Г. Докажем, что при любом $p > 1$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma u|^p \, d\Gamma \leqslant C_p \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p d\Gamma, \tag{1}$$

где C_p зависит только от p и от Γ.

Гармоническую функцию $u(x)$ можно представить в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int\limits_\Gamma \frac{\mu(y)}{r^{m-2}} \, d\Gamma_y, \tag{2}$$

плотность $\mu(y)$ которого определяется из интегрального уравнения

$$\pm \frac{\omega_m}{2} \mu(x) + (m-2) \int\limits_\Gamma \frac{\cos(r, \nu)}{r^{m-1}} \mu(y) \, d\Gamma_y = \frac{\partial u}{\partial \nu}. \tag{3}$$

Пусть λ — такое направление в плоскости, касательной к Γ, что $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad}_\Gamma u|$. По формуле (5) § 43 имеем

$$|\operatorname{grad}_\Gamma u| = \int\limits_\Gamma \frac{\partial r^{2-m}}{\partial \lambda} \mu(y) \, d\Gamma_y. \tag{4}$$

Правая часть последнего равенства есть оператор над $\mu(y)$, ограниченный в $L_p(\Gamma)$. Отсюда

$$\int\limits_\Gamma |\operatorname{grad}_\Gamma u|^p \, d\Gamma \leqslant C'_p \int\limits_\Gamma |\mu(x)|^p \, d\Gamma, \quad C'_p = \text{const}. \tag{5}$$

Если область Ω расположена вне Γ, то уравнение (3) имеет единственное решение (мы предполагаем, что $m \geqslant 3$), которое представляет собой ограниченный оператор над $\frac{\partial u}{\partial \nu}$:

$$\int\limits_\Gamma |\mu(x)|^p \, d\Gamma \leqslant C''_p \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p d\Gamma, \quad C''_p = \text{const},$$

и неравенство (1) имеет место с постоянной $C_p = C'_p C''_p$.

Пусть теперь область Ω лежит внутри Γ. Уравнение (3) разрешимо, так как

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\Gamma = 0,$$

но его решение не единственно: оно имеет вид

$$\mu(x) = \mu_0(x) + c\mu_1(x), \quad c = \mathrm{const},$$

где $\mu_0(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (3), а $\mu_1(x)$ нетривиальное решение соответствующего однородного уравнения; известно, что это решение единственно с точностью до постоянного множителя. В качестве $\mu_0(x)$ возьмем решение уравнения (3), обладающее наименьшей нормой; такое решение существует в силу теоремы Ф. Риса [1]. Используя полную непрерывность интегрального оператора со слабой особенностью, входящего в уравнение (3), и повторяя рассуждения § 2, найдем, что

$$\|\mu_0\| \leqslant \tilde{C} \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|, \quad \tilde{C} = \mathrm{const}.$$

Положим

$$u_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(y) \frac{d\Gamma_y}{r^{m-2}}.$$

Известно, что $u(x) - u_0(x) = \mathrm{const}$, так что можно оценивать градиент функции $u_0(x)$. Аналогично формуле (4) найдем

$$|\mathrm{grad}_\Gamma u_0| = \int_\Gamma \frac{\partial r^{2-m}}{\partial \lambda} \mu_0(y)\, dy$$

и отсюда по-прежнему

$$\int_\Gamma |\mathrm{grad}_\Gamma u|^p \, dx \leqslant \tilde{C}' \int_\Gamma |\mu_0(x)|^p \, d\Gamma \leqslant$$
$$\leqslant C_p \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p d\Gamma, \quad C_p = \tilde{C}' \tilde{C}^p.$$

Неравенство (1) можно распространить и на более общие эллиптические уравнения второго порядка с естественной заменой нормальной производной на конормальную.

Неравенство (1) было получено для $p = 2$ в заметке автора [15]; в этой заметке было указано, что в случае полупространства при том же значении $p = 2$ и при $m = 3$ неравенство (1) переходит в равенство с $C_2 = 1$. Этот результат был обобщен Ж. Хорватом [1] на случай произвольного m.

Опираясь на результаты статьи Э. Мадженеса [1], нетрудно распространить неравенство (1) на гармонические функции, представимые потенциалом простого слоя, плотность которого суммируема на Γ со степенью p.

М. И. Вишик [1] доказал для $p=2$ неравенство, обратное неравенству (1):

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma \leqslant \int_\Gamma (\operatorname{grad}_\Gamma u)^2 \, d\Gamma,$$

где u — функция, гармоническая в шаре, Γ — ограничивающая его сфера. В своей заметке [1] М. И. Вишик указывает, что его неравенство можно распространить на области более общего вида и на общие эллиптические уравнения. Было бы интересно доказать неравенство М. И. Вишика при $p \neq 2$.

§ 45. Равновесие изотропного упругого тела

Пусть изотропное упругое тело заполняет конечную или бесконечную область пространства координат x_1, x_2, x_3 и пусть граница Γ этой области представляет собой связную замкнутую ляпуновскую поверхность. Будем обозначать через $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ вектор смещений, через $\tau_{ik} = \tau_{ik}(\mathbf{u})$ — составляющие соответствующего тензора напряжений. Напомним известные уравнения Ляме:

$$\tau_{ik}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right); \tag{1}$$

здесь δ_{ik} — составляющие единичного тензора, λ и μ — постоянные Ляме. Для простоты допустим, что объемные силы отсутствуют, тогда в состоянии равновесия вектор смещений удовлетворяет уравнению

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

Мы будем рассматривать уравнение (2) при краевых условиях двух типов:

Задача I. На поверхности Γ задан вектор смещений

$$\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}(x), \quad x \in \Gamma. \tag{3}$$

Задача II. На поверхности Γ задан вектор поверхностных напряжений

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \tau_{jk}(\mathbf{u}) \alpha_k \mathbf{x}_j^{(0)} = \mathbf{h}(x), \quad x \in \Gamma. \tag{4}$$

Здесь и в последующем приняты такие обозначения: по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3; α_k — направляющие косинусы внешней нормали ν к поверхности Γ; $\mathbf{x}_j^{(0)}$ — орт оси x_j. В уравнениях (3) и (4) $\mathbf{g}(x)$ и $\mathbf{h}(x)$ означают векторы, заданные на Γ.

Как обычно, будем различать внутренние и внешние задачи I и II, в зависимости от того, какую область заполняет упругая среда — внутреннюю или внешнюю по отношению к Γ.

Из физических соображений, как известно, вытекает, что $\lambda+\frac{2}{3}\mu>0$, $\mu>0$. Для таких значений коэффициентов Ляме известны следующие теоремы единственности:

1) внутренняя задача I имеет не более одного решения;

2) при дополнительном предположении, что на бесконечности $\mathbf{u}=O(|x|^{-1})$ и $\tau_{ik}(\mathbf{u})=O(|x|^{-2})$, внешние задачи I и II имеют не более одного решения;

3) если внутренняя задача II разрешима, то ее решение определено с точностью до „жесткого" смещения вида $\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{x}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ произвольные постоянные векторы, а косой крест означает векторное умножение.

Для того чтобы внутренняя задача II была разрешима, необходимо, чтобы главный вектор и главный момент вектора $\mathbf{h}(x)$ были равны нулю:

$$\int_\Gamma \mathbf{h}(x)\,d\Gamma=0, \qquad \int_\Gamma \mathbf{x}\times\mathbf{h}(x)\,d\Gamma=0. \tag{5}$$

Ниже нам понадобится следующая *формула Бетти*. Пусть Ω — конечная область, ограниченная поверхностью Γ, и пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два вектора, которые непрерывны и дифференцируемы в $\Omega+\Gamma$ и имеют в Ω непрерывные вторые производные. Обозначим через $\mathbf{A}$ взятый с обратным знаком оператор левой части уравнения (2):

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=-\mu\,\Delta\mathbf{u}-(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}. \tag{6}$$

Тогда

$$\int_\Omega(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v})\,dx=\int_\Gamma[\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{v})-\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{u})]\,d\Gamma. \tag{7}$$

Формула Бетти (7) верна и в более общем предположении, что $\mathbf{u},\ \mathbf{v}\in W_p^{(2)}(\Omega)$, где $p>1$.

В последующем важную роль играет фундаментальное решение уравнения (2). Это симметричный тензор $V = V(x, y) = \|v_{lk}\|$, где

$$v_{lk}(x, y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\sigma)}\left\{\frac{3-4\sigma}{r}\delta_{lk} + \frac{(y_l - x_l)(y_k - x_k)}{r^3}\right\}; \qquad (8)$$

здесь $r = |x - y|$, $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ — постоянная Пуассона. При фиксированной точке x и при $y \neq x$ каждый столбец $\mathbf{v}_l(v_{1l}, v_{2l}, v_{3l})$ удовлетворяет уравнению (2). Тензор V называется *тензором Сомильяна*.

Пусть вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет условиям гладкости, упомянутым выше в связи с формулой Бетти, и пусть точка x лежит внутри Γ. Вырежем эту точку шаром малого радиуса ε. К векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}_l$ применим формулу Бетти, беря интеграл по области Ω с вырезанным шаром. Устремив ε к нулю, получим

$$u_l(x) = \int_\Omega \mathbf{v}_l A\mathbf{u} - \int_\Gamma [\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{v}_l) - \mathbf{v}_l\cdot\mathbf{p}(\mathbf{u})]\, d\Gamma_y.$$

Умножив это на $\mathbf{x}_l^{(0)}$ и просуммировав, найдем

$$\mathbf{u}(x) = \int_\Omega V(x, y)\cdot A\mathbf{u}(y)\, dy - \\ - \int_\Gamma [P(x, y)\cdot\mathbf{u}(y) - V(x, y)\cdot\mathbf{p}(\mathbf{u})]\, d\Gamma_y; \qquad (9)$$

через $P(x, y)$ обозначен тензор, l-й столбец которого совпадает с $\mathbf{p}(\mathbf{v}_l)$.

Если точка x лежит вне Γ, то правая часть формулы (9) равна нулю.

Как и в обычной теории потенциала, формула (9) дает повод для введения трех потециалов

$$\int_\Omega V(x, y)\cdot\psi(y)\, dy, \quad \int_\Gamma P(x, y)\cdot\varkappa(y)\, d\Gamma_y,$$

$$\int_\Gamma V(x, y)\cdot\rho(y)\, d\Gamma_y,$$

которые мы назовем соответственно объемным потенциалом, потенциалом двойного слоя и потенциалом простого слоя. Используя результаты § 8 и 29, легко доказать, что объемный потенциал удовлетворяет уравнению $\mathbf{Au} = \boldsymbol{\psi}(x)$ внутри Ω и уравнению $\mathbf{Au} = 0$ вне Ω; объемным потенциалом, как обычно, можно воспользоваться для того, чтобы при наличии объемных сил свести неоднородное дифференциальное уравнение теории упругости к однородному.

Потенциалы простого и двойного слоев удовлетворяют однородному уравнению (2) как внутри, так и вне Г. На бесконечности потенциал простого слоя убывает как $O\left(|x|^{-1}\right)$, а соответствующие напряжения — как $O\left(|x|^{-2}\right)$; аналогичные оценки для потенциала двойного слоя суть $O\left(|x|^{-2}\right)$ и $O\left(|x|^{-3}\right)$. Потенциал простого слоя непрерывен во всем пространстве, если его плотность непрерывна на Г.

Для введенных здесь потенциалов верны теоремы о предельных значениях, аналогичные обычным теоремам теории потенциала. Мы здесь выведем теорему о предельных значениях потенциала двойного слоя, допуская, что плотность потенциала удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем.

Простые вычисления дают следующую формулу для составляющей P_{ij} тензора P:

$$P_{ij} = \frac{1}{8\pi(1-\sigma)}\left[\frac{1-2\sigma}{r^3}\left(\xi_i\delta_{jk} - \xi_j\delta_{ik} - \xi_k\delta_{ij}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{r^5}\xi_i\xi_j\xi_k\right]\alpha_k, \qquad \xi_i = y_i - x_i. \tag{10}$$

Пусть $\boldsymbol{\varkappa}$ — постоянный вектор. Вычислим потенциал двойного слоя

$$\mathbf{u}_0(x) = \int_\Gamma P(x, y)\cdot \boldsymbol{\varkappa}\, dy.$$

Если x лежит вне Г, то, применяя формулу Бетти к векторам $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\mathbf{v}_i$, найдем, что $\mathbf{u}_0(x) \equiv 0$, так как $\mathbf{p}(\boldsymbol{\varkappa}) = 0$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\varkappa} = 0$.

Допустим теперь, что x лежит внутри Г. Окружим точку x сферой S_ε радиуса ε. Из формулы Бетти легко вытекает, что

$$\mathfrak{u}_0(x)=\int\limits_{S_\varepsilon} P(x,\ y)\cdot \varkappa\, dS_\varepsilon;$$

нормаль в выражении P направлена по радиусу. Заменив $y-x$ через εy, приведем последнюю формулу к виду

$$\mathfrak{u}_0(x)=\frac{1}{8\pi(1-\sigma)}\int\limits_S \varkappa_i\,[(1-2\sigma)(y_i\delta_{jk}-y_j\delta_{ik}-y_k\delta_{ij})-$$
$$-3y_iy_jy_k]\,\alpha_k \mathfrak{x}_j^{(0)}\,dS;$$

S — единичная сфера. Пусть ω — шар с границей S. Учтя, что $\frac{\partial y_i}{dy_j}=\delta_{ij}$, найдем по формуле Остроградского

$$\mathfrak{u}_0(x)=-\frac{1}{8\pi(1-\sigma)}\int\limits_\omega \varkappa_i\,[(1-2\sigma)\,\delta_{ij}\delta_{kk}+$$
$$+3\,(y_jy_k\delta_{ik}+y_iy_k\delta_{jk}+y_iy_j\delta_{kk})]\,\mathfrak{x}_j^{(0)}\,dy=$$
$$=-\frac{1}{8\pi(1-\sigma)}\left\{3\,(1-2\sigma)\int\limits_\omega \varkappa_j\mathfrak{x}_j^{(0)}\,dy+15\int\limits_\omega \varkappa_i y_i y_j \mathfrak{x}_j^{(0)}\,dy\right\}.$$

Первый интеграл справа равен $\frac{4\pi}{3}\varkappa$. Второй есть сумма интегралов, соответствующих различным комбинациям значков i и j; эти интегралы равны нулю при $i\neq j$, а при $i=j$ дают в сумме величину

$$\varkappa_j\mathfrak{x}_j^{(0)}\int\limits_\omega y_i^2\,dy=\varkappa\int\limits_\omega y_i^2\,dy=\frac{4\pi}{15}\varkappa.$$

Окончательно $\mathfrak{u}_0(x)=-\varkappa$, x внутри Γ.

Пусть теперь $x\in\Gamma$. В этом случае $\mathfrak{u}_0(x)$ представляется сингулярным интегралом. Вырежем точку x сферой S_ε; обозначим через Γ_ε оставшуюся часть Γ и через S'_ε ту часть сферы S_ε, которая лежит вне Γ. По доказанному выше,

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} P(x,\ y)\cdot\varkappa\, d\Gamma_y+\int\limits_{S'_\varepsilon} P(x,\ y)\cdot\varkappa\, dS_\varepsilon=-\varkappa.$$

Отсюда

$$\mathbf{u}_0(x) = -\varkappa - \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S'_\varepsilon} P(x, y) \cdot \varkappa \, dS_\varepsilon =$$

$$= -\varkappa - \frac{1}{8\pi(1-\sigma)} \int\limits_{S'} x_l \left[(1-2\sigma)(y_l\delta_{jk} - y_j\delta_{ik} - y_k\delta_{ij}) - \right.$$

$$\left. - 3y_l y_j y_k\right] \alpha_k \mathrm{x}_j^{(0)} \, dS;$$

здесь S' — полусфера единичной сферы S. По симметрии ясно, что интеграл по полусфере равен половине интеграла по всей сфере, и потому

$$\mathbf{u}_0(x) = -\frac{1}{2}\varkappa, \qquad x \in \Gamma.$$

Мы пришли таким образом к формуле, аналогичной известной формуле Гаусса в теории потенциала:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y) \cdot \varkappa \, d\Gamma_y = \begin{cases} -\varkappa, & x \text{ внутри } \Gamma, \\ -\frac{1}{2}\varkappa, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \text{ вне } \Gamma. \end{cases} \tag{11}$$

Теперь легко получить предельные формулы для потенциала простого слоя. Пусть

$$\mathbf{u}(x) = \int\limits_{\Gamma} P(x, y) \cdot \varkappa(y) \, d\Gamma_y \tag{12}$$

и пусть точка $x_0 \in \Gamma$. Имеем

$$\mathbf{u}(x) = \int\limits_{\Gamma} P(x, y) \cdot [\varkappa(y) - \varkappa(x_0)] \, d\Gamma_y + \int\limits_{\Gamma} P(x, y) \cdot \varkappa(x_0) \, d\Gamma_y.$$

Мы предположили, что $\varkappa(y)$ удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем. Тогда первый интеграл справа непрерывен, когда точка x проходит через x_0; что касается второго интеграла, то его значение определяется по формуле (11). Теперь легко получаются предельные формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(x_0) &= -\frac{1}{2}\varkappa(x_0) + \int_\Gamma P(x_0, y)\cdot\varkappa(y)\,dy, \\ \mathbf{u}_e(x_0) &= \frac{1}{2}\varkappa(x_0) + \int_\Gamma P(x_0, y)\cdot\varkappa(y)\,dy; \end{aligned} \tag{13}$$

индексы i, e означают пределы изнутри, соответственно извне Γ.

Приведем предельные формулы для потенциала простого слоя. Пусть

$$\mathbf{u}(x) = \int_\Gamma V(x, y)\cdot\rho(y)\,d\Gamma_y, \tag{14}$$

и пусть $\rho(y)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 0$. Тогда в точке $x_0\in\Gamma$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{u})_i &= \frac{1}{2}\rho(x_0) + \int_\Gamma P^*(y, x_0)\,\rho(y)\,d\Gamma_y, \\ \mathbf{p}(\mathbf{u})_e &= -\frac{1}{2}\rho(x_0) + \int_\Gamma P^*(y, x_0)\,\rho(y)\,d\Gamma_y. \end{aligned} \tag{15}$$

Формулы (13) и (15) позволяют свести задачи I и II к некоторым сингулярным интегральным уравнениям. Будем искать решение задачи I в виде потенциала двойного слоя (12), а решение задачи II — в виде потенциала простого слоя (14). Краевые условия (3) и (4) вместе с формулами (13) и (15) приведут нас к интегральным уравнениям

$$\varkappa(x) - 2\int_\Gamma P(x, y)\cdot\varkappa(y)\,d\Gamma_y = -2\mathbf{g}(x), \tag{16}$$

$$\varkappa(x) + 2\int_\Gamma P(x, y)\cdot\varkappa(y)\,d\Gamma_y = 2\mathbf{g}(x), \tag{17}$$

$$\rho(x) + 2\int_\Gamma P^*(y, x)\cdot\rho(y)\,d\Gamma_y = 2\mathbf{h}(x), \tag{18}$$

$$\rho(x) - 2\int_\Gamma P^*(y, x)\cdot\rho(y)\,d\Gamma_y = -2\mathbf{h}(x), \tag{19}$$

соответствующим внутренней первой, внешней первой, внутренней второй и внешней второй задачам; уравнения (16) и (19), а также уравнения (17) и (18), сопряжены между собой.

Каждое из уравнений (17)—(19) на самом деле представляет собой систему из трех уравнений. Исследуем символические определители этих систем. Имея в виду, что $\xi_k\alpha_k = r\cos(r, \nu) = O(r^{1+\gamma})$, где γ — показатель Ляпунова поверхности Г, найдем по формуле (10)

$$P_{ij}(x, y) = \frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)} \cdot \frac{\xi_i\delta_{jk} - \xi_j\delta_{ik}}{r^3}\alpha_k + O(r^{\gamma-2}) = \\ = \frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)} \cdot \frac{\xi_i\alpha_j - \xi_j\alpha_i}{r^3} + O(r^{\gamma-2}); \quad (20)$$

сингулярная часть ядра $P_j(x, y)$ дается первым членом формулы (20).

При замене переменных аргумент каждого элемента символического определителя испытывает линейное преобразование (см. § 21); такое же преобразование испытывает, следовательно, и аргумент символического определителя, множество значений которого поэтому инвариантно относительно замены переменных. Имея это в виду, введем в каждой точке $x \in \Gamma$ местные координаты, направив ось x_3 по внешней нормали к Г, а оси x_1 и x_2 расположив в касательной плоскости к Г. В качестве неизвестных введем составляющие векторов $\varkappa$ и ρ в местных координатах, что, очевидно, не изменит индекса сингулярной системы. Далее, в местных координатах имеем $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Учтя это, рассмотрим, например, систему (16). Приняв во внимание формулу (20), можно в выбранной системе координат представить эту систему в виде

$$\varkappa_1(x) + \frac{1-2\sigma}{4\pi(1-\sigma)}\int\limits_\Gamma \frac{\xi_1}{r^3}\varkappa_3(y)\,d\Gamma_y + T_1(\varkappa) = 2g_1(x),$$

$$\varkappa_2(x) + \frac{1-2\sigma}{4\pi(1-\sigma)}\int\limits_\Gamma \frac{\xi_2}{r^3}\varkappa_3(y)\,d\Gamma_y + T_2(\varkappa) = 2g_2(x),$$

$$\varkappa_3(x) - \frac{1-2\sigma}{4\pi(1-\sigma)}\int\limits_\Gamma \frac{1}{r^3}[\xi_1\varkappa_1(y)+\xi_2\varkappa_2(y)]\,d\Gamma_y + T_3(\varkappa) = 2g_3(x),$$

где T_k — некоторые интегральные операторы со слабой особенностью. Характеристики входящих в последнюю систему сингулярных интегралов суть $\frac{\xi_1}{r} = \cos\theta$ и $\frac{\xi_2}{r} = \sin\theta$; символы таких интегралов получаются из характеристик умножением на $2\pi i$ (формула (2) § 12). Обозначая для краткости $\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} = \delta$, найдем, что символический определитель последней системы равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & i\delta\cos\theta \\ 0 & 1 & i\delta\sin\theta \\ -i\delta\cos\theta & -i\delta\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \frac{3-4\sigma}{4(1-\sigma)^2}, \qquad (21)$$

что отлично от нуля при $\sigma \neq \frac{3}{4}$. Аналогичное заключение справедливо и для систем (17) — (19).

Как видно из формулы (21), символическая матрица — эрмитова. В силу следствия из теоремы 4.40, индекс системы (16) равен нулю, и для нее верны теоремы Фредгольма. То же заключение верно и для систем (17) — (19).

Тот же анализ, что в классической теории потенциала, приводит к следующим выводам. Уравнения (16) и (19) всегда разрешимы и притом единственным образом; уравнение (18) внутренней задачи II разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия (5). Уравнение (17) в общем случае неразрешимо — это связано с тем, что в общем случае решение внешней задачи I нельзя представить в виде слишком быстро убывающего на бесконечности потенциала двойного слоя.

Замечание. Изложение в настоящем параграфе в значительной мере следует статье Н. Киносита и Т. Мура [1]. В этой статье введены потенциалы простого и двойного слоя для уравнений статической теории упругости и получены предельные формулы для этих потенциалов и интегральные уравнения (16) — (19). Однако, упомянутые авторы считают эти уравнения фредгольмовскими, но с разрывными ядрами; для получения непрерывных ядер авторы рекомендуют применять метод итераций. Как видно из предыдущего, все это неосновательно: уравнения (16) — (19) сингулярные и невозможно конечным числом итераций превратить эти уравнения в фредгольмовские. Впрочем, выводы, сделанные Н. Киносита и Т. Мура на основании анализа уравнений (16) — (19), верны; это вытекает из отмеченного выше факта, что для названных уравнений верны теоремы Фредгольма.

Вернемся к уравнению (1). Как было указано выше, физические соображения заставляют считать, что $\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$, или, что то же, $-1 < \sigma < \frac{1}{2}$. Можно доказать, что при этих условиях система скалярных уравнений статической теории упругости

$$(1-2\sigma)\Delta u_k + \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,$$

равносильная векторному уравнению (1), — сильно эллиптическая в смысле определения М. И. Вишика [2]. Докажем, что при любых значениях постоянной σ, за исключением $\sigma = \frac{1}{2}$ и $\sigma = 1$, система уравнений статической теории упругости — эллиптическая в смысле определения И. Г. Петровского [1]. В соответствии с этим определением, достаточно доказать, что при любых вещественных α_1, α_2, α_3, таких что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, определитель

$$\begin{vmatrix} 1-2\sigma+\alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & 1-2\sigma+\alpha_2^2 & \alpha_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 & 1-2\sigma+\alpha_3^2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Этот определитель легко вычисляется; он равен $2(1-2\sigma)^2(1-\sigma)$, что отлично от нуля при $\sigma \neq \frac{1}{2}$ и при $\sigma \neq 1$. Формула (8) показывает, что для таких значений σ существует фундаментальное решение уравнений статической теории упругости; очевидно также, что развитый в настоящем параграфе формальный аппарат (потенциалы, их свойства, сингулярные уравнения краевых задач) без изменений переносится на упомянутые значения постоянной σ. При этом, если $\sigma \neq \frac{3}{4}$, то символический определитель системы сингулярных уравнений есть отличная от нуля постоянная. Отсюда следует, что для значений σ, отличных от $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, индексы первой и второй краевых задач равны нулю, а самые задачи нормально разрешимы.

В случае $\sigma = \frac{3}{4}$ система уравнений теории упругости остается эллиптической, но символический определитель (21) обращается в нуль. Покажем, что в данном случае система (2) принадлежит к типу, указанному А. В. Бицадзе [4], а именно, что для этой системы однородная краевая задача может иметь бесчисленное множество решений.

При $\sigma = \frac{3}{4}$ уравнение (2) приводится к виду

$$\Delta \mathbf{u} - 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \tag{22}$$

будем искать решение этой системы в полупространстве $x_3 > 0$ при краевом условии

$$\mathbf{u} \big|_{x_3=0} = 0. \tag{23}$$

Вектор-функция

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} + x_3 \operatorname{grad} \psi \tag{24}$$

удовлетворяет уравнению (22), если вектор $\boldsymbol{\varphi}$ и скаляр ψ гармонические, и $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$. Отсюда ясно, что уравнениям (22) и (23) удовлетворяет любой вектор вида

$$\mathbf{u} = x_3 \operatorname{grad} \psi,$$

если только функция ψ гармонична в верхнем полупространстве и ее первые производные достаточно быстро убывают на бесконечности.

§ 46. Дифракция установившихся упругих колебаний[1])

Рассмотрим однородную изотропную упругую среду, заполняющую внешность некоторой замкнутой ляпуновской поверхности Γ, и пусть эта среда колеблется с некоторой фиксированной частотой ω. Определим колебания этой среды, предполагая данным вектор напряжений, действующих на поверхность Γ.

Уравнения установившихся упругих колебаний сводятся к следующим уравнениям для скалярного потенциала $\varphi(x, y, z)$ и векторного потенциала $\boldsymbol{\psi}(x, y, z) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$:

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} + k_2^2\boldsymbol{\psi} = 0. \tag{1}$$

---

[1]) Настоящий параграф воспроизводит, с некоторыми изменениями, статью А. М. Кускова [1].

Здесь

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

где ρ — плотность среды, а λ и μ — ее постоянные Ляме. Ниже через $P(x, y, z)$ будет обозначаться произвольная точка пространства, через $Q(\xi, \eta, \zeta)$ — точка поверхности Γ.

Обозначим через $\mathbf{f}(f_1, f_2, f_3)$ вектор напряжений, приложенных к поверхности Γ. Наша задача сводится к интегрированию уравнений (1) при краевых условиях ($P(x, y, z) \in \Gamma$):

$$\rho\omega^2 \left[\frac{\cos(\nu, x)}{k_1^2} \Delta\varphi + \frac{\cos(\nu, y)}{k_2^2} \left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} \right) + \frac{\cos(\nu, z)}{k_2^2} \left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x \partial y} \right) - 2\frac{\cos(\nu, x)}{k_2^2} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x \partial y} \right) \right] = f_1(x); \qquad (2)$$

$$\rho\omega^2 \left[\frac{\cos(\nu, x)}{k_2^2} \left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} \right) + \frac{\cos(\nu, y)}{k_1^2} \Delta\varphi + \frac{\cos(\nu, z)}{k_2^2} \left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} \right) - 2\frac{\cos(\nu, y)}{k_2^2} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y \partial z} \right) \right] = f_2(x);$$

$$\rho\omega^2 \left[\frac{\cos(\nu, x)}{k_2^2} \left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\cos(\nu, y)}{k_2^2} \left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\cos(\nu, z)}{k_1^2} \Delta\varphi - 2\frac{\cos(\nu, z)}{k_2^2} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x \partial z} \right) \right] = f_3(x).$$

Здесь ν — внешняя нормаль к Γ в точке P. Кроме уравнений (1) и (2), искомые потенциалы должны удовлетворять еще условиям излучения на бесконечности.

Пусть $\mu(Q)$ — функция, удовлетворяющая на Γ условию Липшица. Введем в рассмотрение потенциалы

$$F=\int_{\Gamma}\mu(Q)\frac{\cos(r,x)\cos(n,y)}{r^2}\,d\Gamma_Q,$$

$$G=\int_{\Gamma}\mu(Q)\frac{\cos^2(r,x)\cos(n,y)}{r^2}\,d\Gamma_Q,$$

$$H=\int_{\Gamma}\mu(Q)\frac{\cos(r,x)\cos(r,y)\cos(n,r)}{r^2}\,d\Gamma_Q \tag{3}$$

и им аналогичные, получаемые круговой перестановкой координат x, y, z; через r обозначено расстояние между точками P и Q, через n — внешняя нормаль к Γ в точке Q. Для этих потенциалов справедливы предельные формулы вида

$$F_e=F_i=F_0,\qquad H_e=H_i=H_0,$$

$$G_e=G_0-\frac{2\pi}{3}\mu(P),\qquad G_i=G_0+\frac{2\pi}{3}\mu(P). \tag{4}$$

Здесь значки i и e обозначают предельные значения при стремлении точки P к Γ изнутри, соответственно извне Γ; значок 0 обозначает прямое значение соответствующего потенциала на поверхности Γ.

Потенциалы φ и ψ будем искать в виде

$$\varphi(P)=\frac{1}{\pi\rho\omega^2}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2\int_{\Gamma}\left(\mu(Q),\ \operatorname{grad}\frac{e^{-ik_1r}}{r}\right)d\Gamma_Q,$$

$$\psi(P)=\frac{1}{\pi\rho\omega^2}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2\int_{\Gamma}\mu(Q)\times\operatorname{grad}\frac{e^{-ik_2r}}{r}\,d\Gamma_Q, \tag{5}$$

где $\mu(Q)$ подлежащая определению векторная плотность; потенциалы (5) удовлетворяют уравнениям (1) и условию излучения.

Если подставить выражения (5) в краевые условия (2), выполнив при этом предельный переход по формулам (4) и им аналогичным, то получится следующая система сингулярных интегральных уравнений относительно составляющих

μ_1, μ_2, μ_3 вектора μ:

$$
\begin{aligned}
&B\mu_1(P)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{r^2}\{\mu_1(Q)[\cos(n, r)+b\cos^2(r, x)\cos(n, r)]+\\
&\quad+\mu_2(\theta)[\cos(r, x)\cos(n, y)-\cos(r, y)\cos(n, x)+\\
&\quad+b\cos(r, x)\cos(r, y)\cos(n, r)]+\\
&\quad+\mu_3(Q)[\cos(r, x)\cos(n, z)-\cos(r, z)\cos(n, x)+\\
&\qquad+b\cos(r, x)\cos(r, z)\cos(n, r)]\}\,d\Gamma_Q+L_1=f_1(P);\\
&B\mu_2(P)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{r^2}\{\mu_1(Q)[\cos(r, y)\cos(n, x)-\\
&\quad-\cos(r, x)\cos(n, y)+b\cos(r, x)\cos(r, y)\cos(n, r)]+\\
&\quad+\mu_2(Q)[\cos(n, r)+b\cos^2(r, y)\cos(n, r)]+\\
&\quad+\mu_3(Q)[\cos(r, y)\cos(n, z)-\cos(r, z)\cos(n, y)+\\
&\qquad+b\cos(r, y)\cos(r, z)\cos(n, r)]\}\,d\Gamma_Q+L_2=f_2(P); \qquad (6)\\
&B\mu_3(P)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{r^2}\{\mu_1(Q)[\cos(r, z)\cos(n, x)-\\
&\quad-\cos(r, x)\cos(n, z)+b\cos(r, x)\cos(r, z)\cos(n, r)]+\\
&\quad+\mu_2(Q)[\cos(r, z)\cos(n, y)-\cos(r, y)\cos(n, z)+\\
&\quad+b\cos(r, x)\cos(r, z)\cos(n, r)]+\mu_3(Q)[\cos(n, r)+\\
&\qquad+b\cos^2(r, z)\cos(n, r)]\}\,d\Gamma_Q+L_3=f_3(P).
\end{aligned}
$$

В системе (6) L_1, L_2, L_3 суть интегральные операторы, ядра которых имеют слабую особенность;

$$B=-2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2, \quad b=3\left[\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2-1\right].$$

Докажем, что индекс системы (6) равен нулю. В каждой точке $P\in\Gamma$ введем местные координаты, к которым и отнесем систему (6), приняв за новые неизвестные составляющие вектора смещений в местных координатах. Как и в § 47, можно убедиться, что это не изменит индекса системы.

При нашем выборе координатных осей и неизвестных функций сингулярными в системе (6) останутся только те члены, характеристики которых содержат множитель $\cos(n, z)=1$; с точностью до множителя эти характеристики равны либо $\cos(r, x)=\cos\theta$, либо $\cos(r, y)=\sin\theta$, и соответствующие символы получаются умножением характеристик на $2\pi l$ (формула (2) § 12). Теперь легко видеть, что символический определитель системы (6) равен

$$\begin{vmatrix} B & 0 & 2l\cos(r,\ x) \\ 0 & B & 2l\cos(r,\ y) \\ -2l\cos(r,\ x) & -2l\cos(r,\ y) & B \end{vmatrix} =$$

$$= B(B^2-4) = -8\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2\left[\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^4 - 1\right] \neq 0.$$

Таким образом, символический определитель отличен от нуля; ясно также, что символическая матрица симметрична. Отсюда следует, что индекс системы (6) равен нулю. Более детальный анализ показывает, что эта система разрешима, и притом единственным образом, если $\omega \neq \omega_n$, где ω_n — собственные частоты упругих колебаний тела, ограниченного поверхностью Г извне, при условии, что точки поверхности неподвижно закреплены.

ДОБАВЛЕНИЕ

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

Чтобы пояснить значение проблемы мультипликаторов интегралов Фурье, рассмотрим интегральное уравнение

$$au(x)+\int\limits_{E_m} K(x-y)\,u(y)\,dy=f(x), \qquad (*)$$

где ядро $K(x-y)$ не обязательно сингулярное. Интеграл в этом уравнении есть свертка двух функций $K(x)$ и $u(x)$, поэтому уравнение (*) формально решается применением преобразования Фурье; обоснование решения и приводит к проблеме мультипликаторов интегралов Фурье: каким условиям следует подчинить „мультипликатор“ $\Phi=FK$, чтобы интегральный оператор

$$B=F^{-1}\Phi F$$

(F — оператор преобразования Фурье) был ограничен в $L_p(E_m)$? При $p=2$ решение этой проблемы тривиально: как это вытекает из теоремы Планшереля, в этом случае необходимо и достаточно потребовать, чтобы мультипликатор был измерим и ограничен. Случай $p\neq 2$ менее тривиален.

В настоящем Добавлении мы докажем теорему о мультипликаторах интегралов Фурье (теорему 2), дающую простой достаточный признак ограниченности указанного выше оператора B. Отметим, что теорема о мультипликаторах интегралов Фурье имеет значение не только в теории интегральных уравнений, но и в других вопросах; так, в работах А. И. Кошелева [1] и Л. Н. Слободецкого [1] эта теорема была существенно использована при исследовании решений краевых задач для систем эллиптических уравнений в частных производных.

Заметим еще следующее: если в теореме 1.26 потребовать, чтобы символ не зависел от полюса, то это приведет нас к новой теореме о мультипликаторах, годной, если мультипликатор $\Phi(x)$ не зависит от $|x|$. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

Теорема настоящего параграфа является аналогом теоремы Марцинкевича [1] о рядах Фурье и доказана автором в статьях [20, 21]. Марцинкевич сформулировал и доказал свою теорему для простых и двойных рядов Фурье, но как сам Марцинкевич и указал, переход к рядам более высокой кратности не наталкивается на какие-либо затруднения. Для рядов Фурье любой кратности теорему Марцинкевича можно сформулировать следующим образом.

Пусть $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in L_p(\Pi)$, где $1 < p < \infty$ и Π — куб $-\pi \leqslant x_k \leqslant \pi$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и пусть ряд Фурье функции $g(x)$ представлен в виде

$$g(x) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m = 0}^{\infty} A_{j_1 j_2 \ldots j_m}, \tag{1}$$

где $A_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ есть сумма членов, содержащих множителями $\cos j_k x_k$ или $\sin j_k x_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Ряд

$$h(x) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m = 0}^{\infty} \lambda(j_1, j_2, \ldots, j_m) A_{j_1 j_2 \ldots j_m} \tag{2}$$

представляет функцию из $L_p(\Pi)$, если мультипликаторы $\lambda(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda(2^{\alpha_1+1} - 1, 2^{\alpha_2+1} - 1, \ldots, 2^{\alpha_m+1} - 1)| \leqslant M,$$

$$\sum_{j_1 = 2^{\alpha_1}}^{2^{\alpha_1+1}-2} |\lambda(j_1, 2^{\alpha_2+1}, \ldots, 2^{\alpha_m+1}) - \lambda(j_1 + 1, 2^{\alpha_2+1}, \ldots, 2^{\alpha_m+1})| \leqslant M,$$

. . . .

$$\sum_{j_m = 2^{\alpha_m}}^{2^{\alpha_m+1}-2} |\lambda(2^{\alpha_1+1}, \ldots, 2^{\alpha_{m-1}+1}, j_m) - \\ - \lambda(2^{\alpha_1+1}, \ldots, 2^{\alpha_{m-1}+1}, j_m + 1)| \leqslant M,$$

$$\sum_{j_1=2^{\alpha_1}}^{2^{\alpha_1+1}-2} \sum_{j_2=2^{\alpha_2}}^{2^{\alpha_2+1}-2} |\lambda(j_1, j_2, 2^{\alpha_3+1}, \ldots, 2^{\alpha_m+1}) -$$
$$-\lambda(j_1+1, j_2, 2^{\alpha_3+1}, \ldots, 2^{\alpha_m+1}) - \lambda(j_1, j_2+1, 2^{\alpha_3+1}, \ldots, 2^{\alpha_m+1}) +$$
$$+\lambda(j_1+1, j_2+1, 2^{\alpha_3+1}, \ldots, 2^{\alpha_m+1})| \leqslant M,$$

. . . .

$$\sum_{\substack{j_s=2^{\alpha_s} \\ s=1, 2, \ldots, m}}^{2^{\alpha_s+1}-2} |\lambda(j_1, j_2, \ldots, j_m) - \lambda(j_1+1, j_2, \ldots, j_m) - \ldots$$
$$\ldots - \lambda(j_1, j_2, \ldots, j_m+1) +$$
$$+\lambda(j_1+1, j_2+1, j_3, \ldots, j_m) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m \lambda(j_1+1, j_2+1, \ldots, j_m+1)| \leqslant M; \qquad (3)$$

в неравенствах (3) M *означает постоянную, а* α_s — *любое неотрицательное целое число. При этом имеет место неравенство*

$$\|h\| \leqslant MA_{p, m}\|g\|, \qquad (4)$$

в котором $A_{p,m}$ *зависит только от* p *и* m, *а норма берется в метрике пространства* L_p (II).

Коротко наметим доказательство теоремы Марцинкевича; для простоты ограничимся случаем одной независимой переменной. В этом случае условия (3) равносильны следующим:

$$|\lambda_j| \leqslant M, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$
$$\sum_{j=2^\alpha}^{2^{\alpha+1}-2} |\lambda_{j+1} - \lambda_j| \leqslant M.$$

Доказательство основано на двух леммах, из которых первая принадлежит Литтлвуду и Палею [1], вторая — Зигмунду [1, 2].

Лемма 1. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x), \qquad A_j(x) = a_j \cos jx + b_j \sin jx,$$
$$\Delta_j(x) = \sum_{\nu=2^j}^{2^{j+1}-1} A_\nu(x)$$

и пусть $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$. *Тогда существуют такие положительные постоянные* A_p *и* B_p, *зависящие только от* p, *что*

$$A_p \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j^2(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx \leqslant B_p \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j^2(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx.$$

Лемма 2. *Пусть* $\{f_\nu(x)\}$ *последовательность функций, определенных в* $(-\pi, \pi)$, $n = n(\nu)$ — *произвольная последовательность натуральных чисел. Пусть* $S_{\alpha, \beta}$ *означает частную сумму порядка* β *ряда Фурье функции* $f_\alpha(x)$. *Тогда при любом* $p > 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu} S_{\nu, n}^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \leqslant C_p \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu} f_\nu^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx, \qquad C_p = \text{const}.$$

Положим

$$\Delta_j(\lambda, x) = \sum_{\nu=2^j}^{2^{j+1}-1} \lambda_\nu A_\nu(x).$$

Очевидно, можно ограничиться случаем, когда ряд Фурье функции $g(x)$ не содержит свободного члена. Тогда к функциям $g(x)$ и $h(x)$ можно применить лемму 1; дело сводится к установлению неравенства вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu} \Delta_\nu^2(\lambda, x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \leqslant M^p A'_p \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu} \Delta_\nu^2(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx, \quad A'_p = \text{const}.$$

Применив к сумме $\Delta_\nu(\lambda, x)$ преобразование Абеля, имеем

$$\Delta_\nu(\lambda, x) = \sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} r_{\nu, \mu}(x)(\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}) + \Delta_\nu(x) \lambda_{2^\nu - 1},$$

где

$$r_{\nu, \mu}(x) = \sum_{k=2^\nu}^{\mu} A_k(x).$$

Теперь по неравенству Коши

$$\Delta_\nu^2(\lambda, x) \leqslant 2M\left\{\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} |\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}|\, r_{\nu,\mu}^2(x) + |\lambda_{2^\nu-1}|\, \Delta_\nu^2(x)\right\},$$

и в силу леммы 2

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_\nu \Delta_\nu^2(\lambda, x)\right)^{\frac{p}{2}} dx \leqslant$$

$$\leqslant (2M)^{\frac{p}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_\nu \left\{\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} |\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}|\, r_{\nu,\mu}^2(x) + |\lambda_{2^\nu-1}|\, \Delta_\nu^2(x)\right\}^{\frac{p}{2}} dx \leqslant$$

$$\leqslant (2M)^{\frac{p}{2}} C_p \int_{-\pi}^{\pi} \sum_\nu \left\{\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} |\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}|\, \Delta_\nu^2(x) + \right.$$

$$\left. + |\lambda_{2^\nu-1}|\, \Delta_\nu^2(x)\right\}^{\frac{p}{2}} dx \leqslant (2M)^p C_p \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_\nu \Delta_\nu^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx,$$

что и требовалось доказать.

Как видно из изложенного, доказательство Марцинкевича предполагает, что функция $f(x)$ и мультипликаторы λ_j принимают только вещественные значения, однако распространение на комплекснозначные функции и мультипликаторы очевидно.

В последующем нам будет удобнее писать ряд Фурье функции не в виде (1), а в виде

$$g(x) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = -\infty}^{+\infty} a_{n_1 n_2 \ldots n_m} \exp\left[i(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_m x_m)\right]. \tag{5}$$

Это приводит нас к новой форме теоремы Марцинкевича:

Теорема 1. *Пусть* $g(x) \in L_p(\Pi)$. *Ряд*

$$h(x) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m = -\infty}^{+\infty} \lambda(n_1, n_2, \ldots, n_m)\, a_{n_1 n_2 \ldots n_m} \times$$

$$\times \exp\left[i(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_m x_m)\right] \tag{6}$$

представляет функцию из $L_p(\Pi)$, *если выполнены неравенства*

$$|\lambda(\pm 2^{\alpha_1+1} \mp 1, \ \pm 2^{\alpha_2+1} \mp 1, \ \ldots, \ \pm 2^{\alpha_m+1} \mp 1)| \leqslant M,$$

$$\sum_{|n_1|=2^{\alpha_1}}^{2^{\alpha_1+1}-2} |\lambda(n_1, \ \pm 2^{\alpha_2+1}, \ \ldots, \ \pm 2^{\alpha_m+1}) - \\ - \lambda(n_1+1, \ \pm 2^{\alpha_2+1}, \ \ldots, \ \pm 2^{\alpha_m+1})| \leqslant M,$$

. . . .

$$\sum_{|n_m|=2^{\alpha_m}}^{2^{\alpha_m+1}-2} |\lambda(\pm 2^{\alpha_1+1}, \ \ldots, \ \pm 2^{\alpha_{m-1}+1}, \ n_m) - \\ - \lambda(\pm 2^{\alpha_1+1}, \ \ldots, \ \pm 2^{\alpha_{m-1}+1}, \ n_m+1)| \leqslant M, \qquad (7)$$

. . . .

$$\sum_{\substack{|n_s|=2^{\alpha_s} \\ s=1, 2, \ldots, m}}^{2^{\alpha_s+1}-2} |\lambda(n_1, \ n_2, \ \ldots, \ n_m) - \lambda(n_1+1, \ n_2, \ \ldots, \ n_m) - \ldots \\ \ldots - \lambda(n_1, n_2, \ldots, n_m+1) + \lambda(n_1+1, n_2+1, \ldots, n_m) + \ldots \\ \ldots + (-1)^m \lambda(n_1+1, \ n_2+1, \ \ldots, \ n_m+1)| \leqslant M,$$

где M — *постоянная, а* α_s — *любые неотрицательные целые числа. Имеет место неравенство*

$$\|h\| \leqslant A_{p,m} M \|g\|, \qquad (8)$$

в котором норма берется в метрике $L_p(\Pi)$, *а* $A_{p,m}$ *зависит только от* p *и* m.

Чтобы упростить выкладки, проведем доказательство теоремы 1 для случаев простого и двойного ряда Фурье. Пусть

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}.$$

Положим

$$g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}, \qquad g_2(x) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n e^{inx},$$

$$h_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) a_n e^{inx}, \qquad h_2(x) = \sum_{n=-1}^{-\infty} \lambda_n a_n e^{inx},$$

так что $g = g_1 + g_2$, $h = h_1 + h_2$. К рядам $h_1(x)$ и $h_2(x)$ теорема Марцинкевича, очевидно, применима, так что

$$\|h_1\| \leqslant A_{p,1} M \|g_1\|, \qquad \|h_2\| \leqslant A_{p,1} M \|g_2\|$$

и, следовательно,

$$\|h\| \leqslant A_{p,1} M (\|g_1\| + \|g_2\|).$$

Как хорошо известно ($z = e^{ix}$, $\zeta = e^{iy}$),

$$g_1(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{g(y)\, d\zeta}{\zeta - z} = Q_+(g),$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{g(y)\, d\zeta}{\zeta - z} = Q_-(g).$$

По известной теореме М. Риса

$$\|g_k\| \leqslant C \|g\|, \quad k = 1, 2, \; C = \text{const}.$$

Обозначая произведение $2CA_{p,1}$ по-прежнему через $A_{p,1}$, получим

$$\|h\| \leqslant A_{p,1} M \|g\|,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь

$$g(x) = g(x_1, x_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{+\infty} a_{n_1 n_2} \exp[i(n_1 x_1 + n_2 x_2)],$$

$$h(x) = h(x_1, x_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{+\infty} \lambda(n_1, n_2) a_{n_1 n_2} \exp[i(n_1 x_1 + n_2 x_2)].$$

На этот раз положим

$$g(x) = \sum_{k=1}^{4} g_k(x), \qquad h(x) = \sum_{k=1}^{4} h_k(x),$$

где значениям $k = 1, 2, 3, 4$ соответствуют точки (n_1, n_2) числовой плоскости, расположенные в k-м квадранте. К каждой из пар $g_k(x)$, $h_k(x)$ теорема Марцинкевича применима:

$$\|h_k\| \leqslant A_{p,2} M \|g_k\|, \qquad \|h\| \leqslant A_{p,2} M \sum_{k=1}^{4} \|g_k\|^2.$$

Далее, $g_k(x)$ можно получить из $g(x)$ применением операторов Q_+ или Q_- по переменным x_1 и x_2. Так,

$$g_1 = Q_+(x_1)\,Q_+(x_2)\,g, \qquad g_2 = Q_-(x_1)\,Q_+(x_2)\,g.$$

Символ $Q_+(x_1)$ означает, что оператор Q_+ применяется к функции, аргументом которой считается x_1. Теперь по теореме М. Риса имеем, например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_1(x_1, x_2)|^p\,dx_1 \leqslant C^p \int_{-\pi}^{\pi} |Q_+(x_2)\,g|^p\,dx_1.$$

Интегрируя это по x_2, получаем

$$\|g_1\|^p \leqslant C^p \int_{-\pi}^{\pi} dx_1 \int_{-\pi}^{\pi} |Q_+(x_2)\,g|^p\,dx_2.$$

По той же теореме М. Риса

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Q_+(x_2)\,g|^p\,dx_2 \leqslant C^p \int_{-\pi}^{\pi} |g(x_1, x_2)|^p\,dx_2.$$

Теперь $\|g_1\| \leqslant C^2\,\|g\|$. Аналогично $\|g_k\| \leqslant C^2\,\|g\|$, $k=2$, 3, 4. Отсюда, заменяя обозначение $4C^2A_{p,2}$ на $A_{p,2}$, получаем

$$\|h\| \leqslant A_{p,2}M\,\|g\|,$$

и теорема доказана.

Теорема Марцинкевича остается, очевидно, в силе, если куб Π заменить кубом Π_l с произвольной стороной $2l$; для последующего важно, что постоянная $A_{p,m}$ при этом не меняется. Действительно, положим $x = \frac{l\xi}{\pi}$, $g(x) = G(\xi)$, $h(x) = H(\xi)$. По неравенству (8)

$$\int_{\Pi} |H(\xi)|^p\,d\xi \leqslant A_{p,m}^p M^p \int_{\Pi} |G(\xi)|^p\,d\xi.$$

Возвращаясь к переменной x, получим из последнего неравенства

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^m \int_{\Pi_l} |h(x)|^p\,dx \leqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^m A_{p,m}^p M^p \int_{\Pi_l} |g(x)|^p\,dx,$$

или

$$\|h\|_{L_p(\Pi_l)} \leqslant A_{p,\,m} M \|g\|_{L_p(\Pi_l)}. \tag{9}$$

Аналогом теоремы Марцинкевича для интеграла Фурье является

Теорема 2. *Пусть во всем пространстве E_m, кроме, быть может, начала координат, функция $\Phi(x)$ непрерывна и ее производная*

$$\frac{\partial^m \Phi}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}$$

существует в каждой точке, тогда как все производные, предшествующие этой, непрерывны. [1]) *Пусть еще*

$$|x|^k \left| \frac{\partial^k \Phi}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \right| \leqslant M, \quad 0 \leqslant k \leqslant m, \qquad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant m. \tag{10}$$

Тогда оператор

$$Pg = h(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{E_m} e^{i(x,\,y)} \Phi(y)\, dy \int\limits_{E_m} e^{-i(y,\,z)} g(z)\, dz = F^{-1} \Phi F g \tag{11}$$

определен на множестве, плотном в $L_p(E_m)$, $1 < p < \infty$, и ограничен в этом пространстве, причем

$$\|P\| \leqslant A_{p,\,m} M, \tag{12}$$

где $A_{p,\,m}$ — постоянная теоремы 1.

Рассмотрим сперва случай $m = 1$; независимую переменную обозначим через x. В данном случае неравенства (10) сводятся к следующим

$$|\Phi(x)| \leqslant M, \qquad |x\Phi'(x)| \leqslant M. \tag{13}$$

В качестве множества, плотного в $L_p(-\infty, +\infty)$, возьмем множество бесконечно дифференцируемых финитных функций. Пусть $g(x)$ такая функция. Разложим ее в ряд

---

[1]) Условия, наложенные на функцию $\Phi(x)$, можно несколько ослабить.

Фурье в некотором промежутке $(-l, l)$:

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}g(t)\exp\left[\frac{in\pi(x-t)}{l}\right]dt \tag{14}$$

и положим

$$h_l(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda(n)}{2l}\int_{-l}^{l}g(t)\exp\left[\frac{in\pi(x-t)}{l}\right]dt, \quad \lambda(n)=\Phi\left(\frac{n\pi}{l}\right). \tag{15}$$

Если $\Phi(0)$ не определено, то под $\lambda(0)$ можно понимать любое число, не превосходящее M по модулю. Покажем, что числа $\lambda(n)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. В данном случае эти условия сводятся к выполнению неравенств

$$|\lambda(\pm 2^{\alpha+1}\mp 1)|\leqslant M, \qquad \sum_{|n|=2^\alpha}^{2^{\alpha+1}-2}|\lambda(n+1)-\lambda(n)|\leqslant M.$$

Первое неравенство очевидно. Чтобы установить второе неравенство, оценим разность

$$|\lambda(n+1)-\lambda(n)|=\left|\int_{\frac{n\pi}{l}}^{\frac{(n+1)\pi}{l}}\Phi'(t)\,dt\right|\leqslant\frac{\pi}{l}\sup|\Phi'(t)|;$$

sup берется по значениям t, лежащим в промежутке интегрирования. По второму неравенству (13) $|\Phi'(t)|\leqslant M|t|^{-1}$, и если, например, $n>0$, то $|\Phi'(t)|\leqslant\frac{Ml}{n\pi}$. Отсюда $|\lambda(n+1)-\lambda(n)|\leqslant\frac{M}{n}$ и

$$\sum_{n=2^\alpha}^{2^{\alpha+1}-2}|\lambda(n+1)-\lambda(n)|\leqslant M.$$

Если же $n<0$, то

$$|\Phi'(t)|\leqslant\frac{Ml}{\pi(|n|-1)},$$

и по-прежнему

$$\sum_{|n|=2^\alpha}^{2^{\alpha+1}-2} |\lambda(n+1)-\lambda(n)| \leqslant M.$$

Теперь по теореме 1.42

$$\int_{-l}^{l} |h_l(x)|^p\,dx \leqslant A_{p,\,1}^p M^p \int_{-l}^{l} |g(x)|^p\,dx.$$

Это неравенство усилим, интегрируя слева в пределах $(-N,\ N)$, где $N \leqslant l$, а справа в пределах $(-\infty,\ +\infty)$. Это дает нам

$$\int_{-N}^{N} |h_l(x)|^p\,dx \leqslant A_{p,\,1}^p M^p \|g\|^p. \tag{16}$$

Докажем, что в любом конечном промежутке $h_l(x) \to h(x)$ равномерно относительно x при $l \to \infty$. Функция

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} g(y)\,dy$$

бесконечно дифференцируема и на бесконечности убывает быстрее любой степени x. Интеграл (11), который при $m = 1$ имеет вид

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\Phi(y)\,\tilde{g}(y)\,dy \tag{17}$$

сходится абсолютно и равномерно на всей оси x.

Пусть $g(x) = 0$ при $|x| > a$. Будем считать, что $l > a$, тогда формулы (16) и (17) преобразуются так:

$$h_l(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{2l} \int_{-a}^{a} g(t) \exp\left[\frac{in\pi(x-t)}{l}\right] dt, \tag{18}$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\,dy \int_{-a}^{a} g(t) \exp[iy(x-t)]\,dt. \tag{19}$$

Положим $\Phi(x)=\Phi_1(x)+\Phi_2(x)$, где $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ дифференцируемы в каждой точке $x\neq 0$, причем $\Phi_1(x)\equiv 0$, $|x|\geqslant 1$ и $\Phi_2(x)\equiv 0$, $|x|\leqslant\frac{1}{2}$. Такое разбиение сводит общий случай к двум более частным: 1) $\Phi(x)\equiv 0$, $|x|\geqslant 1$; 2) $\Phi(x)\equiv 0$, $|x|<\frac{1}{2}$.

Обозначим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\exp[iy(x-t)]\,dt=G(x,\ y).$$

Функция $G(x,\ y)$ бесконечно дифференцируема. В случае 1) имеем

$$h(x)=\int\limits_{-1}^{1} G(x,\ y)\,\Phi(y)\,dy, \tag{20}$$

$$h_l(x)=\sum_{n=-\varkappa}^{\varkappa}\frac{\pi}{l}\,\Phi\left(\frac{n\pi}{l}\right)G\left(x,\ \frac{n\pi}{l}\right),\qquad \varkappa=\left[\frac{l}{\pi}\right]. \tag{21}$$

Величину (21) можно рассматривать как интегральную сумму для интеграла (20). Функция $G(x,\ y)$ непрерывна в прямоугольнике $-N\leqslant x\leqslant N$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, а функция $\Phi(y)$ ограничена при $-1\leqslant y\leqslant 1$ и непрерывна при $y\neq 0$. Отсюда легко усмотреть, что в промежутке $-N\leqslant x\leqslant N$ имеет место равномерное стремление $h_l(x)\to h(x)$.

Переходим к случаю 2). Пусть $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, кроме того, $\Phi(x)\equiv 0$ при $|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

Внутренний интеграл в формуле (19) возьмем по частям, после чего этой формуле нетрудно придать вид

$$h(x)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a}^{a} g'(t)\,\tilde{\varphi}(t-x)\,dt, \tag{22}$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ есть преобразование Фурье функции $\varphi(x)=\frac{\Phi(x)}{x}$:

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,\frac{\Phi(y)}{y}\,dy.$$

Отметим нужные для дальнейшего простые свойства функции $\varphi(x)$:

а) $\varphi(x) \equiv 0$ при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$;

б) $\varphi(x)$ ограничена и дифференцируема на всей оси;

в) $|\varphi(x)| \leqslant \frac{M}{|x|}$;

г) $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{2M}{x^2}$.

Интегрируя по частям в (18), получим

$$h_l(x) = -\frac{1}{2il} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \int_{-a}^{a} g'(t) \exp\left[\frac{in\pi(x-t)}{l}\right] dt.$$

Изменим порядок суммирования и интегрирования. Это допустимо, так как при l фиксированном $\varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, и ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left[\frac{in\pi(x-t)}{l}\right]$$

сходится в среднем с показателем 2. Теперь имеем

$$h_l(x) = \frac{1}{2il} \int_{-a}^{a} g'(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left[\frac{in\pi(x-t)}{l}\right].$$

Достаточно теперь показать, что в промежутке $|x| \leqslant N$ равномерно выполняется равенство

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{l} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left[\frac{in\pi(x-t)}{l}\right] = \tilde{\varphi}(x-t), \tag{23}$$

в котором предел берется в среднем с показателем 2 по промежутку $-a \leqslant t \leqslant a$. Положим $x - t = z$, тогда z заключено в промежутке $|z| \leqslant b$, $b = a + N$. Оценим величину

$$\sigma = \left\| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{l} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{iyz} dy \right\|;$$

норма взята в смысле метрики пространства $L_2(-b, b)$. Для произвольного натурального s имеем

$$\sigma \leqslant \left\| \int_{-\infty}^{-s} \varphi(y) e^{iyz} dy \right\| + \left\| \int_{s}^{\infty} \varphi(y) e^{iyz} dy \right\| +$$
$$+ \left\| \sum_{n=-\infty}^{-\varkappa s-1} \frac{\pi}{l} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right) \right\| + \left\| \sum_{n=\varkappa s}^{\infty} \frac{\pi}{l} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right) \right\| +$$
$$+ \left\| \int_{-s}^{s} \varphi(y) e^{iyz} dy - \sum_{n=-\varkappa s}^{\varkappa s-1} \frac{\pi}{l} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right) \right\|, \quad \varkappa = \left[\frac{l}{\pi}\right]. \tag{24}$$

Первые четыре члена в (24) оцениваются по теореме замкнутости. Так,

$$\left\| \int_{-\infty}^{-s} \varphi(y) e^{iyz} dy \right\|^2 \leqslant 2\pi \int_{-\infty}^{-s} |\varphi(y)|^2 dy \leqslant 2\pi M^2 \int_{-\infty}^{-s} \frac{dy}{y^2} = \frac{2\pi M^2}{s}.$$

Далее, если $l \geqslant b$, то

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{-\varkappa s-1} \frac{\pi}{l} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right) \right\|^2 \leqslant \frac{2\pi^2}{l} \sum_{n=-\infty}^{-\varkappa s-1} \left| \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2M^2 l \sum_{n=\varkappa s+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2M^2 l \int_{\varkappa s}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{2M^2 l}{\varkappa s},$$

что при l достаточно большом не превосходит $\frac{3\pi M^2}{s}$; сумма первых четырех слагаемых в (24) не превосходит $\frac{10\pi M^2}{s}$. Зафиксируем s, взяв его столь большим, чтобы было

$\frac{10\pi M^2}{s} < \frac{\varepsilon}{2}$, и оценим пятое слагаемое в (24). Имеем:

$$\left|\int_{-s}^{s} \varphi(y) e^{lyz} dy - \sum_{n=-\varkappa s}^{\varkappa s-1} \frac{\pi}{l} \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=-\varkappa s}^{\varkappa s-1} \int_{\frac{n}{\varkappa}}^{\frac{n+1}{\varkappa}} \left|\varphi(y) e^{lyz} - \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right)\right| dy +$$

$$+ \left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{\pi}{l}\right) \sum_{n=-\varkappa s}^{\varkappa s-1} \left|\varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right)\right|. \quad (25)$$

Легко видеть, что вторая сумма справа в (25) имеет оценку $O\left(\frac{\ln l}{l}\right)$. Далее, в фиксированном промежутке $-s \leqslant \leqslant y \leqslant s$ функции $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ ограничены некоторой постоянной B. Тогда, если $\frac{n}{\varkappa} \leqslant y \leqslant \frac{n+1}{\varkappa}$, то

$$\left|\varphi(y) e^{l\,yz} - \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right) \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right)\right| \leqslant \left|\varphi(y) - \varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right)\right| +$$

$$+ \left|\varphi\left(\frac{n\pi}{l}\right)\right| \cdot \left|e^{lyz} - \exp\left(\frac{in\pi z}{l}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant B(1 + |z|)\left(y - \frac{n\pi}{l}\right) = O\left(\frac{1}{l}\right),$$

и первая сумма в (25) имеет оценку $O\left(l^{-1}\right)$. Отсюда следует, что пятое слагаемое в (24) имеет оценку $O\left(\frac{\ln l}{l}\right)$ и при l достаточно большом оно меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Тем самым наше утверждение относительно равенства (23) доказано; отсюда следует, что $h_l(x) \to h(x)$ равномерно в промежутке $-N \leqslant \leqslant x \leqslant N$. Полагая теперь в (16) $l \to \infty$, а затем $N \to \infty$, мы докажем теорему 2 для случая $m = 1$.

Случай произвольного m исследуется по той же схеме; мы приведем здесь только доказательство того, что мультипликаторы

$$\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \Phi\left(\frac{n_1\pi}{l}, \frac{n_2\pi}{l}, \ldots, \frac{n_m\pi}{l}\right)$$

удовлетворяют условиям теоремы 1.41. Установим, например, что выполняется последнее из неравенств (7). Для определенности допустим, что все номера $n_1, n_2, \ldots, n_m$ положительны. Выражение под знаком суммы легко приводится к виду

$$\left| \int\limits_{\frac{n_1\pi}{l}}^{\frac{(n_1+1)\pi}{l}} \int\limits_{\frac{n_2\pi}{l}}^{\frac{(n_2+1)\pi}{l}} \ldots \int\limits_{\frac{n_m\pi}{l}}^{\frac{(n_m+1)\pi}{l}} \frac{\partial^m \Phi}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} dx_1 dx_2 \ldots dx_m \right|,$$

что в силу неравенства (10) не превосходит величины

$$M\left(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_m^2\right)^{-\frac{m}{2}}.$$

Нам предстоит оценить сумму

$$S_m = \sum_{\substack{n_s = 2^{\alpha_s} \\ s=1, 2, \ldots, m}}^{2^{\alpha_s+1}-2} \left(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_m^2\right)^{-\frac{m}{2}}. \tag{26}$$

Положим $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_{m-1}^2 = \nu^2$ и выделим сумму

$$\sum_{n_m = 2^{\alpha_m}}^{2^{\alpha_m+1}-2} \left(\nu^2 + n_m^2\right)^{-\frac{m}{2}}.$$

Имеем

$$\sum_{n=2^\alpha}^{2^{\alpha+1}-2} \left(\nu^2 + n^2\right)^{-\frac{m}{2}} < \int\limits_{2^\alpha - 1}^{2^{\alpha+1}-2} \frac{dn}{\left(\nu^2 + n^2\right)^{-\frac{m}{2}}}.$$

Дальнейшие оценки проводим так: полагаем $2^\alpha - 1 = a$, $n = \nu x$, тогда

$$\int\limits_{2^\alpha - 1}^{2^{\alpha+1}-2} \frac{dn}{\left(\nu^2 + n^2\right)^{\frac{m}{2}}} = \int\limits_a^{2a} \frac{dn}{\left(\nu^2 + n^2\right)^{\frac{m}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\nu^{m-1}} \int\limits_{\frac{a}{\nu}}^{\frac{2a}{\nu}} \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^{\frac{m}{2}}} \leqslant \frac{1}{\nu^{m-1}} \int\limits_{\frac{a}{\nu}}^{\frac{2a}{\nu}} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Заменяя подынтегральную функцию ее наибольшим значением, имеем далее

$$\int\limits_{\frac{a}{\nu}}^{\frac{2a}{\nu}} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{a\nu}{a^2+\nu^2} < 1.$$

Теперь

$$S_m < \sum_{\substack{n_s = 2^{\alpha_s} \\ s=1,\, 2,\, \ldots,\, m-1}}^{2^{\alpha_s+1}-2} (n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_{m-1}^2)^{-\frac{m-1}{2}},$$

или $S_m < S_{m-1}$. Отсюда $S_m < S_1$. Но

$$S_1 = \sum_{n=2^{\alpha}}^{2^{\alpha_1+1}-2} \frac{1}{n} < 1;$$

окончательно $S_m < 1$ и последняя сумма в (7) не превосходит M. Аналогично оцениваются и остальные суммы в (7).

Заметим, что теорема 2 позволяет расширить оператор (11) на все пространство $L_p(E_m)$ с сохранением неравенства (12).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Александров П. и Хопф Х. (Alexandroff P. und Hopf H.) 1. Topologie I, Berlin, 1935.

Аткинсон Ф. В. 1. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб., 28 (70), № 1, 1951, 3—14.

Бернштейн С. Н. 1. О некоторых априорных оценках в обобщенной задаче Дирихле, Докл. АН СССР, 124, № 4, 1959, 735—738.

Бицадзе А. В. 1. Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, 93, № 4, 1953, 595—597.

2. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 6, 1953, 525—538.

3. О двумерных интегралах типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, 16, № 3, 1955, 177—184.

4. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений в частных производных, Успехи матем. наук, 3, № 6, 1948, 241—242.

Бляшке В. 1. Дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1938.

Бохнер С. (Bochner S.) 1. Theta relations with spherical harmonics, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, № 12, 1951.

Векуа И. Н. 1. Об одном методе решения краевых задач уравнений в частных производных, Докл. АН СССР, 101, № 4, 1955, 593—596.

Векуа Н. П. 1. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, ГТТИ, 1950.

Вишик М. И. 1. Об одном неравенстве для граничных значений гармонических функций в шаре, Успехи матем. наук, 6, № 2, 1951, 165—166.

2. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сб., 29 (71), 1951, 615—676.

Вольперт А. И. 1. Об индексе краевых задач для системы гармонических функций с тремя независимыми переменными, Докл. АН СССР, 133, № 1, 1960, 13—15.

Гахов Ф. Д. 1. Краевые задачи, Физматгиз, 1953.

Гегелиа Т. Г. 1. О граничных значениях интеграла типа Коши для негладких поверхностей, Сообщ. АН ГрузССР, 15, № 8, 1954, 481—488.

2. Об одном обобщении теоремы Г. Жиро, Сообщ. АН ГрузССР, 16, № 9, 1955, 657—663.

3. Граничные свойства обобщенных пространственных потенциалов, Тр. Тбилисск. ин-та, 56, 1955, 185—206.

4. Основная лемма И. И. Привалова для пространственных потенциалов, Сообщ. АН ГрузССР, 18, № 3, 1957, 257—264.

5. О свойствах некоторых классов непрерывных функций при трансформации Гильберта в E^n, Сообщ. АН ГрузССР, **19**, № 3, 1957, 257—261.

6. Об ограниченности сингулярных операторов, Сообщ. АН ГрузССР, **20**, № 5, 1958, 517—523.

7. Дифференциальные свойства некоторых интегральных преобразований, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **26**, 1959, 195—225.

8. О композиции сингулярных ядер, Докл. АН СССР, **135**, № 4, 1960, 767—770.

Гейне Э. (Heine E.) 1. Die speciellen Lameschen Funktionen erster Art von beliebiger Ordnung, J. reine und angew. Math., **62**, 1863, 110—141.

Глушко В. П. 1. Об операторах типа потенциала и некоторых теоремах вложения, Докл. АН СССР, **126**, № 3, 1959, 467—470.

Гохберг И. Ц. 1. О линейных уравнениях в пространстве Гильберта, Докл. АН СССР, **76**, № 1, 1951, 9—12.

2. Об устойчивости индекса неограниченного оператора, Матем. сб., **33 (75)**, № 1, 1953, 193—198.

3. К теории многомерных сингулярных уравнений, Докл. АН СССР, **133**, № 6, 1960, 1279—1282.

Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г. 1. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Успехи матем. наук, **12**, № 2, 1957, 43—118.

Грей Э. и Метьюз Г. В. 1. Функции Бесселя и их приложения, ИЛ, 1949.

Гусева О. В. 1. О краевых задачах для сильно эллиптических систем, Докл. АН СССР, **102**, № 6, 1955, 1069—1072.

Жиро Ж. (Giraud G.) 1. Equations à intégrales principales, Ann. Scient. École norm. supér., **51**, fasc. 3 et 4, 1934, 251—372.

2. Sur certains opérations du type elliptique, C. r. Acad. sci., **200**, 1935, 1651—1653.

3. Sur une classe générale d'équations à intégrales principales, C. r. Acad. sci., **202**, № 26, 1936, 2124—2126.

Зейферт Г. и Трельфалль В. 1. Топология, ОНТИ, 1938.

Зигмунд А. (Zygmund A.) 1. On a theorem of Paley, Proc. Cambridge Philos. Soc., **34**, part 2, 1938, 125—133.

2. On the convergence and summability of power series on the circle of convergence, Fundam. math., **30**, 1938, 171—196.

3. Hilbert transforms in E^n, Proc. intern. Congress Math., v. III, Amsterdam, 1954.

4. On singular integrals, Rend. mat. e applic., ser V, **16**, fasc. 3—4, 1957, 468—505.

Ицкович И. А. 1. Задачи эквивалентности в теории двумерных сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, **5**, 1952, 3—36.

2. Обращение формулы Жиро, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, **11**, 1954, 7—11.

3. О сингулярных интегралах, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, **29**, 1957, 37—44.

Кальдерон А. П. (Calderon A. P.) 1. Integrales singulares. 2° simposium sobre algunos problemas matematicos que estan estudiando en Latino America, Montevideo, 1954, 319—328.

2. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. Math., 80, № 1, 1958, 16—36.

Кальдерон А. П. и Зигмунд А. (Calderon A. P. and Zygmund A.) 1. On the existense of certain singular integrals, Acta Math., 88, № 1—2, 1952, 85—139.

2. Singular integrals and periodic functions, Studia Math., 14, № 1, 1955, 249—271

3. On a problem of Mihlin, Trans. Amer. Math. Soc., 78, № 1, 1955, 209—224.

4. On singular integrals, Amer. J. Math., 78, № 2, 1956, 289—309.

5. Algebras of certain singular operators, Amer. J. Math., 78, № 2, 1956, 310—320.

6. Addenda to the paper „On a problem of Mihlin", Trans. Amer. Math. Soc., 84, № 2, 1957, 559—560.

7. Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., 79, № 4, 1957, 901—921.

Канторович Л. В. и Акилов Г. П. 1. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Киносита Н. и Мура Т. (Kinoshita Nobuo and Mura Toshio.) 1. On boundary value problem of elasticity, Res. Repts Fac. Engng. Meiji Univ., № 8, 1956, 56—82.

Коидзуми С. (Koizumi S.) 1. On the singular integrals. I, Proc. Japan Acad., 34, № 4, 1958, 193—198.

2. On the singular integrals. II, Proc. Japan Acad., 34, № 5, 1958, 235—240.

Колосовская А. К. и Ицкович И. А. 1. Пространственная задача об обтекании потоком идеальной жидкости пористых препятствий, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 11, 1954, 29—47.

Кон Дж. Дж. (Kohn J J.) 1. Singular integral equations for differential forms on Riemannien manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42, № 9, 1956, 650—653.

Кошелев А. И. 1. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем, Успехи матем. наук, 13, № 4, 1958, 29—88.

Краббе Г. Л. (Krabbe G. L.) 1. A space of multipliers of type $L^p(-\infty, +\infty)$, Pacif. J. Math., 9, № 3, 1959, 729—737.

Купрадзе В. Д. 1. Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний, Успехи матем. наук, 8, в. 3 (55), 1953, 21—74.

2. О краевых задачах теории упругости для кусочно неоднородных тел. Вывод основных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, 22, № 2, 3, 1959, 129—136.

3. О краевых задачах теории упругости для кусочно неоднородных тел. Доказательство теоремы существования, Сообщ. АН ГрузССР, 22, № 3, 1959, 265—271.

4. К теории граничных задач для неоднородных упругих тел. Основная теорема эквивалентности, Сообщ. АН ГрузССР, 22, № 4, 1959, 401—408.

5. О краевых задачах теории упругости для кусочно неоднородных тел, Сообщ. АН ГрузССР, 22, № 5, 1959, 521—528.

Кусков А. М. 1. Дифракция установившихся упругих колебаний, Докл. АН СССР, 70, № 2, 1950, 197—200.

Ладыженская О. А. 1. О замыкании эллиптического оператора, Докл. АН СССР, 79, № 5, 1951, 723—725.

2. Смешанная задача для гиперболического уравнения, ГТТИ, 1952.

Литтлвуд Дж. и Палей Р. (Littlewood J. and Paley R.) 1. Theorems on Fourier series and power series, (I) J. London Math. Soc., 6, 1931, 230—233; (II) Proc. London Math Soc., 42, № 2, 1936, 52—89.

Мадженес Э (Magenes E.) 1. Sulla teoria del potenziale, Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 24, 1955, 510—522.

Мальгранж Б. (Malgrange B.) 1. Opérateurs intégraux singuliers. Théoremes d'interpolation dans les espaces L^p, Sémin. Schwartz, Fac. scient. Paris, 1959—1960, 4 année, Paris, 1960, 1/1—1/6.

2. Multiplicateurs de FL^p, Sémin. Schwartz, Fac. scient. Paris, 1959—1960, 4 année, Paris, 1960, 2/1—2/7.

3. Multiplicateurs de FL^p (suite), Sémin. Schwartz, Fac. scient. Paris, 1959—1960, 4 année, Paris, 1960, 3/1—3/6.

4. Multiplicateurs de FL^p (fin), Sémin. Schwartz, Fac. scient. Paris, 1959—1960, 4 année, Paris, 1960, 4/1—4/8.

5. Noyaux valeurs principales, Sémin. Schwartz, Fac. scient. Paris, 1959—1960, 4 année, Paris, 1960, 5/1—5/7.

6. Noyaux valeurs principales (fin), Sémin. Schwartz, Fac. scient. Paris, 1959—1960, 4 année, Paris, 1960, 6/1—6/4.

7. Calcul symbolique approximatif, Sémin. Schwartz, Fac. scient. Paris, 1959—1960, 4 année, Paris, 1960, 7/1—7/6.

Марцинкевич И. (Marcinkiewicz J.) 1. Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia math., 8, 1939.

Мелер Ф. Г. (Mehler F. G.) Über die Entwickelung einer Funktion von beliebig vielen variablen nach Laplaceschen Funktionen höhere Ordnung, J. reine und angew. Math., 66., 1866, 161—176.

Миранда К. 1. Уравнения в частных производных эллиптического типа, ИЛ, 1957.

Михлин С. Г. 1. Композиция двойных сингулярных интегралов, Докл. АН СССР, 2 (11), № 1 (87), 1936, 3—6.

2. Сингулярные интегральные уравнения с двумя независимыми переменными, Матем. сб., 1 (43), № 4, 1936, 535—550.

3. Дополнение к предшествующей статье, Матем. сб., 1 (43), № 6, 1936, 963—964.

4. Об одной проблеме теории сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, 15, № 8, 1937, 429—432.

5. Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений, Матем. сб., 3 (45), № 1, 1938, 121—140.

6. Распространение операции сингулярного интегрирования на пространство L_2, Докл. АН СССР, 19, № 5, 1938, 353—355.

7. Сведение сингулярного интегрального уравнения к эквивалентному уравнению Фредгольма, Докл. АН СССР, 20, № 2—3, 1938, 94—96.

8. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, 24, № 4, 1939, 315—317.

9. Об одной теореме F. Nöther'a, Докл. АН СССР, 43, № 4, 1944, 143—145.

10. О разрешимости линейных уравнений в гильбертовом пространстве, Докл. АН СССР, 57, № 1, 1947, 11—12.

11. Сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, 3, № 3 (25), 1948, 29—112.

12. Интегральные уравнения и их приложения, ГТТИ, 1949.

13. Вариационные методы решения задач математической физики, Успехи матем. наук, 5, № 6 (40), 1950, 3—51.

14. О некоторых оценках, связанных с функцией Грина, Докл. АН СССР, 78, № 3, 1951, 443—446.

15. Об одном неравенстве для граничных значений гармонических функций, Успехи матем. наук, 6, № 6, 1951, 158—159.

16. Проблема минимума квадратичного функционала, ГТТИ, 1952.

17. По поводу теоремы об ограниченности оператора сингулярного интегрирования, Успехи матем. наук, 8, № 1, 1953, 213—217.

18. Композиция многомерных сингулярных интегралов, Вестн. Ленингр. ун-та, № 2, 1955, 24—41.

19. К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, Вестн. Ленингр. ун-та, № 1, 1956, 3—24.

20. О мультипликаторах интегралов Фурье, Докл. АН СССР, 109, № 4, 1956, 701—703.

21. Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы, Вестн. Ленингр. ун-та, № 7, 1957, 143—155.

22. Сингулярные интегралы в пространствах L_p, Докл. АН СССР, 117, № 1, 1957, 28—31.

23. Две теоремы о регуляризаторах, Докл. АН СССР, 125, № 4, 1959, 737—739.

24. О дифференцировании рядов по сферическим функциям, Докл. АН СССР, 126, № 2, 1959, 278—280.

25. Замечания о решении многомерных сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, 131, № 5, 1960, 1019—1021.

26. Сингулярные интегральные уравнения в классах липшицевых функций, Докл. АН СССР, 138, № 3, 1961, 541—544.

Мусхелишвили Н. И. 1. Сингулярные интегральные уравнения, ГТТИ, 1946.

Нетер Ф. (Nother F.) 1. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann., 82, 1921, 42—63.

Петровский И. Г. 1. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, Успехи матем. наук, 1, № 3—4, 1946, 44—70.

Плеснер А. И. и Рохлин В. А. 1. Спектральная теория линейных операторов, Успехи матем. наук, 1, № 1, 1946, 71—191.

Привалов И. И. 1. Интеграл Коши, Саратовск. ун-т, 1919.

2. Граничные свойства аналитических функций, ГТТИ, 1950.

Рис Ф. 1. О линейных функциональных уравнениях, Успехи матем. наук, в. 1, 1936, 175—199.

Рис Ф. и Секефальви-Надь Б. 1. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.

Рыжик И. М. и Градштейн И. С. 1. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГТТИ, 1951.

Сили Р. Т. (Seely R. T.) 1. Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. Math., **81**, № 3, 1959, 658—690.

2. Regularisation of singular integral operators on compact manifolds, Amer. J. Math., **83**, № 2, 1961, 265—275.

Симоненко И. Б. 1. Ограниченность сингулярных интегралов в пространствах Орлича, Докл. АН СССР, **130**, № 5, 1960, 984—987.

Слободецкий Л. Н. 1. Обобщенные решения параболических и эллиптических систем, Изв. АН СССР, сер. матем., **21**, № 6, 1957, 809—834.

Соболев С. Л. 1. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. Ленингр. ун-та, 1950,

Соломяк М. З. 1. Об эллиптических операторах на двумерных многообразиях, Докл. АН СССР, **139**, № 1, 1961, 37—39.

Стейн Е. М. (Stein E. M.) 1. Note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc., **8**, № 2, 1957, 250—254.

Стоун М. Х. (Stone M. H.) 1. Linear transformations in Hilbert space, New-York, 1932.

Тржицинский В. И. (Trjitzinsky W. J.) 1. Multidimensional principal integrals, boundary value problems and integral equations, Acta math., **84**, № 1—2, 1950, 1—128.

Трикоми Ф. Дж. (Tricomi F. G.) 1. Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie „con asterisco", Rend. Accad. Naz. Lincei, **3**, ser. 6a, fasc. 9, 1926, 535—539.

2. Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio, Math. Z., **27**, 1928, 87—133.

Фикера Г. (Fichera G.) 1. Una introduzione a la teoria delle equazioni integrali singolari, Rend. mat. e applic., **17**, № 1—2, 1958, 82—191.

Фридрихс К. (Friedrichs K.) 1. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Ann., **109**, № 4—5, 19 4 465—487.

Хведелидзе Б. В. 1. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. ин-та матем. АН ГрузССР, **23**, 1956, 3—158.

Хволес А. Р. 1. Метод последовательных приближений для одного интегрального уравнения с неподвижной особенностью, Сообщ. АН ГрузССР, **21**, № 5, 1958, 519—522.

Хорват Ж. (Horwáth J.) 1. Sur les fonctions conjuguées à plusieurs variables, Proc. Koninkl. nederl. acad. wet., **56**, № 1, 1952.

2. Sur l'itération de la transformée de Hilbert d'une distribution complexe, C. r. Acad. sci., **237**, № 23, 1953, 1480—1482.

3. Transformadas de Hilbert de distribuciones, 2° symposium sobre algunos problemas matematicos que se estan estudiando en Latino America, Montevideo, 1954, 17—29.

4. Singular integral operators and spherical harmonics, Trans. Amer. Math. Soc., **62**, № 1, 1956, 52—63.

Шерман Д. И. 1. Об одном случае регуляризации сингулярных интегральных уравнений, Прикл. матем. и мех., **15**, 1951, 75—82.

Эбаноидзе Т. А. 1. Об одном нелинейном интегральном уравнении с неподвижной сингулярностью, Сообщ. АН ГрузССР,

23, № 5, 1959, 521—526.

2. Об одном двумерном интегральном уравнении с неподвижной особенностью, Тр. Вычисл. центра АН ГрузССР, 1, 1960, 57—61.

3. О бесконечной системе нелинейных интегральных уравнений с неподвижной особенностью, Сообщ. АН ГрузССР, **26**, № 2, 1961, 130—135.

Эрдейи А., Магнус В., Оберхеттингер Ф., Трикоми Ф. Дж., (Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.) 1. Higher transcendental functions, v. II, 1953.

Ямагути М. (Yamaguti Masaya.) 1. Sur l'inégalité d'énergie pour le système hyperbolique, Proc. Japan Acad., **35**, № 1, 1959, 37—41.

Михлин Соломон Григорьевич

Многомерные сингулярные интегралы
и интегральные уравнения

Л., Физматгиз, 1962 г., 256 стр. с илл.

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *А. А. Лукьянов*
Корректор *Л. А. Любович*

Сдано в набор 18/VIII 1961 г Подписано к печати 31/III 1962 г. Бумага 84×108/32 Физ. печ. л. 8,00. Усл. печ. л. 13,12. Уч.-изд. л. 13,07. Тираж 6000 экз. Т-00927. Цена книги 85 коп. Заказ № 2745.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29